UNIVERSITY OF HAWAII PERIODICAL
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

63. BAND, 2. HEFT
MIT 8 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1959)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1959

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

63. Band/2. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Brauner, H. Über Strahlflächen von konstantem Drall 101

Weier, J. Eine topologische Konstante 112

Sabidussi, G. On the Minimum Order of Graphs with Given Automorphism Group 124

Lomnicki, Z. A. and **S. K. Zaremba.** On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes — II 128

Kautny, W. Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen 169

Buchbesprechungen 189

Über Strahlflächen von konstantem Drall

Von

H. Brauner, Wien

(*Eingegangen am 19. März 1958*)

Die Strahlflächen von verschwindendem Drall, die *Torsen*, lassen sich leicht klassifizieren und in einheitlicher Weise erzeugen; es ist daher naheliegend, Ähnliches für die *Strahlflächen konstanten Dralls* ($\neq 0$) zu versuchen. Als Beispiele für solche Flächen seien etwa außer den Drehhyperboloiden und den Strahlschraubflächen die von *R. Edlinger* untersuchten Flächen genannt, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehflächen sind [1] und eine algebraische Fläche 3. Grades, nämlich eine den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulierende *Cayley*sche Fläche [2, S. 241].

Das Ziel dieser kleinen Note ist es, Erzeugungen von gewissen Normalformen der Strahlflächen konstanten Dralls anzugeben, aus denen dann durch Anwendung von *Minding*schen Biegungen sämtliche Flächen dieser Art erhalten werden können; außerdem werden eine Reihe von Eigenschaften dieser Flächen sowie Beziehungen zur Kurventheorie besprochen. Die analytische Behandlung der gestellten Frage geschieht unter Verwendung der von *E. Kruppa* [3], [4] begründeten natürlichen Geometrie der Strahlflächen[1], deren für diese Arbeit notwendigen Formeln in Abschnitt 1 zusammengefaßt sind. Unter Verwendung dieses äußerst zweckmäßigen Kalküls werden auch gelegentlich bekannte Sätze aus der Theorie der Strahlflächen kurz bewiesen.

1.

Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t)$ eine Raumkurve c und $\mathfrak{e}(t)$ ein Einsvektor, so stellt

$$\mathfrak{x}(t, v) = \mathfrak{y}(t) + v\,\mathfrak{e}(t) \tag{1}$$

eine Strahlfläche Φ dar mit dem Zentralnormalenvektor

[1] Eine lehrbuchartige Darstellung findet sich in [8].

$$\mathfrak{n} = \frac{\dot{\mathfrak{e}}}{|\dot{\mathfrak{e}}|} \tag{2}$$

und dem Zentraltangentenvektor

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}}}{|\dot{\mathfrak{e}}|}. \tag{3}$$

Die t-Linien schneiden auf den Erzeugenden (v-Linien) dabei kongruente Punktreihen aus. Für die Striktionslinie s von Φ gilt

$$\mathfrak{s}(t) = \mathfrak{y}(t) - \frac{\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{e}}}{\dot{\mathfrak{e}}^2}\,\mathfrak{e} \tag{4}$$

und für den *Drall* d

$$d = \frac{(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{e}}\,\dot{\mathfrak{y}})}{\dot{\mathfrak{e}}^2}. \tag{5}$$

Wir verwenden i. f. die auf *E. Kruppa* zurückgehende natürliche Geometrie der Strahlflächen, die sich auf das von den Einsvektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ gebildete Rechtsdreibein stützt, wobei diese Vektoren nun als Funktionen der Bogenlänge u der Striktionslinie s anzusehen sind. Ist u_1 bzw. u_3 die Bogenlänge des sphärischen Bildes von $\mathfrak{e}(u)$ bzw. $\mathfrak{z}(u)$, so heißt $\varkappa = du_1 : du$ die „*Krümmung*" und $\tau = du_3 : du$ die „*Torsion*" der Strahlfläche. Ist ferner $\mathfrak{t}(u)$ der Tangentenvektor der Striktionslinie, so ist $\sigma(u) = \sphericalangle\, \mathfrak{e}\, \mathfrak{t}$ die „*Striktion*". Durch Vorgabe der drei Funktionen $\varkappa(u)$, $\tau(u)$, $\sigma(u)$ ist die Strahlfläche bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt. Für $\sigma = 0$ erhält man die Torsen. Die Koordinatendarstellung von $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ lautet

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{s}(u) + v\,\mathfrak{e}(u) = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\,du + v\,\mathfrak{e}(u); \tag{6}$$

die Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{e}' = \varkappa\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}' = -\varkappa\,\mathfrak{e} + \tau\,\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}' = -\tau\,\mathfrak{n} \tag{7}$$

sind analog den *Frenet*schen Formeln gebaut. Für den Drall d gilt

$$d = \frac{\sin\sigma}{\varkappa}. \tag{8}$$

Aus (1) errechnet man die Normalkrümmung $\varkappa_n$, geodätische Krümmung $\varkappa_g$ und geodätische Torsion τ_g der Striktionslinie s zu

$$\varkappa_n = -\tau\sin\sigma + \varkappa\cos\sigma, \quad \varkappa_g = -\sigma', \quad \tau_g = \varkappa\sin\sigma + \tau\cos\sigma \qquad (9_{1,2,3})$$

und für ihre Krümmung K und Torsion T gilt

$$K^2 = \varkappa_n^2 + \varkappa_g^2, \quad T = \tau_g + \frac{\varkappa_g^2}{\varkappa_n^2 + \varkappa_g^2}\left(\frac{\varkappa_n}{\varkappa_g}\right)'. \qquad (10_{1,2})$$

Die *Mindingschen Biegungsflächen* Φ^* einer Strahlfläche $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ zerfallen in zwei Scharen mit den natürlichen Gleichungen $\Phi_1^*(\varkappa, \tau^*, +\sigma)$ bzw. $\Phi_2^*(\varkappa, \tau^*, -\sigma)$, wobei τ^* eine beliebige Funktion von u ist. Die Flächen Φ_1^* besitzen längs entsprechenden Erzeugenden den gleichen Drall („gleichsinnige" Mindingbiegung), bei Übergang zu den Flächen Φ_2^* wechselt der Drall das Vorzeichen („gegensinnige" Mindingbiegung). Die Flächen Φ_2^* sind zur Fläche $\Phi_2(\varkappa, -\tau, -\sigma)$, die zu Φ gegensinnig kongruent ist, gleichsinnige Mindingssche Biegungsflächen. Wir wollen i. f. unter „Biegung" immer eine gleichsinnige Mindingbiegung verstehen. Insbesondere gilt: *Jede Strahlfläche kann so verbogen werden, daß ihre Striktionslinie Schmieglinie* (nach (9_1): $\tau^* = \varkappa \operatorname{ctg} \sigma$) *oder Krümmungslinie* (nach (9_3): $\tau^* = -\varkappa \operatorname{tg} \sigma$) *wird. Jede Strahlfläche läßt sich in eine konoidale Strahlfläche* ($\tau^* = 0$) *und in eine Strahlfläche mit einem Drehkegel als Richtkegel* ($\tau^* : \varkappa = \text{konst}$) *verbiegen.* Außerdem gilt nach (9_2): *Die Striktionslinie einer Strahlfläche konstanter Striktion ist geodätisch.*

2.

Wir setzen $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ als Strahlfläche konstanten Dralls $d(\neq 0)$ voraus, d. h. es gilt nach (8)

$$\varkappa \sigma' \cos \sigma - \varkappa' \sin \sigma = 0. \qquad (11)$$

Die Flächenkurve $v = v(u)$ ist genau dann eine (von den Erzeugenden verschiedene) *Schmieglinie*, wenn — wie man aus (6) errechnet —

$$2\varkappa \sin\sigma \,.\, v' = \varkappa^2 \tau v^2 + (\varkappa\sigma' \cos\sigma - \varkappa' \sin\sigma) v + (\tau \sin\sigma - \varkappa \cos\sigma) \sin\sigma \qquad (12)$$

gilt. Die Tangentenvektoren

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v v' = \mathfrak{e}(\cos\sigma + v') + \mathfrak{n}\varkappa v + \mathfrak{z} \sin\sigma \qquad (13)$$

der Schmieglinien in den Punkten einer Erzeugenden $e_0(u = u_0)$ bestimmen das *oskulierende Hyperboloid* Ω_0 längs e_0, dessen Richtkegel in einem Koordinatensystem (x, y, z), in dem $\mathfrak{e}_0(1, 0, 0)$, $\mathfrak{n}_0(0, 1, 0)$, $\mathfrak{z}_0(0, 0, 1)$ gilt, nach (12) und (13) lautet

$$\varkappa\tau \sin\sigma [x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + 2xz\frac{\varkappa}{\tau} - z^2 \frac{\varkappa}{\tau} \operatorname{ctg}\sigma)] + (\varkappa\sigma' \cos\sigma - \varkappa' \sin\sigma) yz = 0. \qquad (14)$$

Ist die *Striktionslinie von* Φ *Krümmungslinie* ($\tau = -\varkappa \operatorname{tg}\sigma$) und hat Φ

konstanten Drall, so gilt unter Verwendung von (11) für diesen Richtkegel

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x - z \operatorname{ctg} \sigma)^2 = 0, \tag{15}$$

d. h. Ω_0 ist ein *Drehhyperboloid.* Daraus kann man folgern:

Satz 1: *Verbiegt man eine Strahlfläche konstanten Dralls so, daß ihre Striktionslinie Krümmungslinie wird, so sind sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide.*

Diese Flächen hat *R. Edlinger* [1] genauer untersucht und eine kinematische Erzeugung dieser Flächen angegeben. Unter Verwendung seiner Ergebnisse gilt:

Satz 2: *Rollt ein gleichseitiges Paraboloid π auf einer seiner Biegungsflächen ψ, so überstreicht die ψ nicht berührende Scheitelerzeugende von π eine Strahlfläche konstanten Dralls. Jede Fläche konstanten Dralls kann in eine solche Fläche verbogen werden.*

Die Differentialgleichung der *Krümmungslinien* von (6) hat die Bauart

$$f(\varkappa, \sigma)\, v'^2 + g(\varkappa, \tau, \sigma; v)\, v' + (\varkappa^2 v^2 + \sin^2 \sigma)(\varkappa \sin \sigma + \tau \cos \sigma) + \\ + v \cos \sigma (\varkappa \sigma' \cos \sigma - \varkappa' \sin \sigma) = 0, \tag{16}$$

wobei f, g Funktionen der angegebenen Argumente sind. Ist Φ eine Strahlfläche konstanten Dralls und ihre Striktionslinie s eine Krümmungslinie, so wird nach (9_3) und (11) aus (16)

$$v'(f v' + g) = 0, \tag{17}$$

d. h. die v-Linien sind sämtlich Krümmungslinien.

Satz 3: *Jede Strahlfläche konstanten Dralls kann so verbogen werden, daß die Krümmungslinien einer Schar auf den Erzeugenden kongruente Punktreihen ausschneiden*[2].

3.

Ist die *Striktionslinie* s einer Strahlfläche *eine Schmieglinie*, so gilt wegen $\varkappa_n = 0$ nach (9_1) $\tau = \varkappa \operatorname{ctg} \sigma$ und für ihre Torsion T gilt nach (10) [2, S. 147]

$$T = \frac{\varkappa}{\sin \sigma} = \frac{1}{d}. \tag{18}$$

Ist die Striktionslinie einer Strahlfläche Φ eine Schmieglinie konstanter Torsion, so besitzt die Fläche konstanten Drall. Aus (9_2) entnimmt man

[2] Daß diese Eigenschaft den Edlingerflächen zukommt, ist ohne Rechnung in [1, S. 346] bewiesen.

einen Satz von *J. G. Darboux*: *Die Erzeugenden einer Strahlfläche sind längs der Striktionslinie geodätisch parallel.* Weniger bekannt ist die Umkehrung [2, S. 143]: *Sind die Erzeugenden längs einer Flächenkurve c geodätisch parallel, so ist diese die Striktionslinie.* Ist nämlich c gegeben durch $u = u(t)$, $v = v(t)$, so ist $\mathfrak{e}$ längs c geodätisch parallel, wenn $\frac{d\,\mathfrak{e}}{dt}$ parallel zu den Flächennormalen in den Punkten von c ist, also

$$\mathfrak{e}' \dot{u} \times (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) = \mathfrak{o} \tag{19}$$

gilt und das liefert nach (6)

$$v \varkappa^2 \mathfrak{e} = \mathfrak{o}, \tag{20}$$

also $v = 0$.

Damit erhält man folgende Erzeugungsweise der Strahlflächen konstanten Dralls:

Satz 4: *Verschiebt man eine Gerade des Schmiegstreifens einer Kurve konstanter Torsion geodätisch parallel, so überstreicht sie eine Fläche konstanten Dralls. Durch Verbiegung von solchen Flächen erhält man sämtliche Flächen konstanten Dralls.*

Damit ist es möglich, eine koordinatenmäßige Darstellung jener *Normalformen* von Flächen konstanten Dralls anzugeben, bei denen die Striktionslinie Schmieglinie ist. Ist $\mathfrak{b}(\gamma)$ ein Einsvektor und γ die Bogenlänge seines sphärischen Bildes, also $\left|\frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,\gamma}\right| = 1$ und führt man an Stelle von γ den neuen Parameter

$$u = \frac{1}{T}\gamma \tag{21}$$

ein (wobei T eine beliebige Konstante bedeutet), so stellt — wie eine leichte Rechnung lehrt —

$$\mathfrak{s}(u) = \frac{1}{T} \int \left(\mathfrak{b}(u) \times \frac{d\mathfrak{b}}{du}\right) \tag{22}$$

eine Kurve c konstanter Torsion T mit der Bogenlänge u und der Binormalen $\mathfrak{b}$ dar[3]. Soll c Striktionslinie und Schmieglinie einer nach Satz 4 erzeugten Strahlfläche konstanten Dralls $d = \frac{1}{T}$ sein, so besitzen ihre Erzeugenden $\mathfrak{e}$ unter Verwendung der Striktion σ, des Tangentenvektors $\mathfrak{t}$ und des Hauptnormalenvektors $\mathfrak{h}$ von c die Darstellung

[3] Vgl. etwa [5, S. 87].

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{t}\cos\sigma + \mathfrak{y}\sin\sigma, \tag{23}$$

wobei

$$\mathfrak{t} = \frac{1}{T}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}'),\quad \mathfrak{y} = -\frac{1}{T}\mathfrak{b}' \tag{24}$$

gilt. $\mathfrak{e}$ liegt in der Schmiegebene von c und wird dann längs c geodätisch parallel verschoben, wenn (wegen $\varkappa_n = 0$) für den Winkel σ zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{e}$ gilt

$$\sigma = -\int \varkappa_g\, du = -\int K\, du, \tag{25}$$

wobei $K(u)$ die Krümmung von c ist. Unter Verwendung von (22) folgt

$$K = \left|\frac{\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}''}{T}\right| \tag{26}$$

und damit für die Strahlfläche konstanten Dralls d:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}(u,v) = d\int(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}')\,du + v\,d[(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}')\cos\left(\left|d\int\left|\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}''\right|du\right|\right) + \\ + \mathfrak{b}'\sin\left(\left|d\int\left|\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}''\right|du\right|\right)].\end{aligned} \tag{27}$$

Die natürlichen Gleichungen dieser Strahlfläche lauten

$$\varkappa = \frac{1}{d}\sin\sigma,\quad \tau = \frac{1}{d}\cos\sigma,\quad \sigma = -\int K(u)\,du. \tag{28}$$

Ersetzt man τ durch eine beliebige Funktion $\tau^*(u)$, so erhält man alle Strahlflächen konstanten Dralls.

4.

Es sollen nun einige *besondere Strahlflächen konstanten Dralls* untersucht werden.

Besitzt eine Strahlfläche konstanten Dralls eine *geodätische Striktionslinie*, so hat sie nach (9_2) konstante Striktion und damit gilt nach (11)

$$\varkappa'\sin\sigma = 0. \tag{29}$$

Das liefert entweder mit $\sigma = 0$ (und damit $d = 0$) die *Torsen* oder $\varkappa = \text{konst.}$ Die Striktionslinie einer Strahlfläche $\Phi(\varkappa = \text{konst.}, \sigma = \text{konst.} \neq 0, \pi/2)$ ist aber eine *Bertramkurve*, wie aus (10) folgt. Solche Strahlflächen sind *Biegungsflächen eines Drehhyperboloids*, da für diese ebenfalls $\varkappa = \text{konst.}$ und $\sigma = \text{konst} \neq 0, \pi/2$ gilt.

Satz 5[4]: *Die Strahlflächen konstanten Dralls mit geodätischer Striktionslinie sind (für $\sigma \neq 0, \pi/2$) Biegungsflächen eines Drehhyperboloids.*

[4] Vgl. auch [2, S. 146] und [6, S. 90 und S. 105].

Ist eine Strahlfläche *orthoid* ($\sigma = \pi/2$), so folgt aus (10) [6, S. 78]

$$T = \varkappa = \frac{1}{d}, \tag{30}$$

d. h. *die Binormalenfläche einer Kurve konstanter Torsion hat konstanten Drall.* Das liefert in analoger Weise wie bei (27) eine Koordinatendarstellung dieser Flächen in der Form

$$\mathfrak{x}(u, v) = d \int (\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}')\, du + v\, \mathfrak{b}, \tag{31}$$

die deshalb von Bedeutung ist, weil unter diesen Flächen sicher *algebraische* vorkommen (die Ordnung der Binormalenfläche einer algebraischen Kurve der Ordnung n und der Klasse m ist gleich $n + m$)[5].

Für eine orthoide Fläche konstanten Dralls ist nach (30) auch $\varkappa = konstant$. Verbiegt man sie zu einer *konoidalen Fläche* ($\tau = 0$), so hat die neue Fläche die natürlichen Koordinaten $\Phi^*(\varkappa = \text{konst.}, 0, \pi/2)$ und ist daher eine *Wendelfläche.*

Satz 6[4]: *Jede orthoide Strahlfläche konstanten Dralls ist Biegungsfläche einer Wendelfläche.*

Jede Strahlfläche kann zu einer *konoidalen* ($\tau = 0$) verbogen werden. Ist $\varkappa$ die Krümmung, s die Striktionslinie einer konoidalen Strahlfläche konstanten Dralls d, so ist der Zentraltangentenvektor $\mathfrak{z}$ ein konstanter Vektor normal zu Richtebene (die i. f. horizontal gedacht ist) und die Kurve

$$\mathfrak{x}(u) = \mathfrak{s}(u) - d \int_{u_0}^{u} \varkappa(u)\, du \,.\, \mathfrak{z} \tag{32}$$

ist — wie eine Rechnung sofort zeigt — eine *ebene Kurve* in der durch den Punkt $u = u_0$ der Striktionslinie gehenden horizontalen Ebene. Ihre Tangenten

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{e} \cos\sigma + \mathfrak{z} \sin\sigma - d\,\varkappa\,\mathfrak{z} = \mathfrak{e} \cos\sigma \tag{33}$$

sind zu den Erzeugenden der Strahlfläche parallel; ihre Krümmung hat den Wert

$$K(u) = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 - d^2 \varkappa^2}} \tag{34}$$

und für ihre Bogenlänge w gilt

$$K\, dw = \varkappa\, du. \tag{35}$$

---

[5] Die Frage nach den algebraischen Kurven konstanter Torsion wurde von *Darboux* angeregt und u. a. in [9] und [10] behandelt.

Geht man umgekehrt von einer ebenen Kurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(w)$ (Binormalvektor $\mathfrak{b} = \text{konst}$) aus, so ist

$$\mathfrak{x}(w, v) = \mathfrak{y}(w) + d \int_{w_0}^{w} K(w)\, dw \,.\, \mathfrak{b} + v \frac{d\mathfrak{y}}{dw} \tag{36}$$

eine konoidale Strahlfläche mit dem konstanten Drall d und es gilt:

Satz 7: *Trägt man auf den Erzeugenden eines lotrechten Zylinders durch eine in einer horizontalen Ebene liegende Kurve c mit der Krümmung K und der Bogenlänge w von den Punkten von c die Strecken d $\int K\, dw$ auf, so erhält man die Striktionslinie einer konoidalen Strahlfläche konstanten Dralls d, deren Erzeugenden zu den Tangenten von c parallel sind. Umgekehrt läßt sich jede konoidale Strahlfläche konstanten Dralls ausgehend von der Normalprojektion ihrer Striktionslinie auf eine Richtebene so erzeugen.*

Diese Konstruktion versagt nur, wenn $K = 0$ oder $K = \infty$ gilt. Für $K = 0$ ist nach (34) $\varkappa = 0$, d. h. es liegt ein *Zylinder* vor; $K = \infty$ führt auf $\varkappa = 1/d$, also eine *Wendelfläche. Die Wendelfläche ist also das einzige gerade Konoid konstanten Dralls.*

Wählt man c insbesondere als *Kreis*, so folgt die bekannte Tatsache: *Der Drall einer offenen geraden Strahlschraubfläche ist gleich dem Schraubparameter.*

5.

Bei jeder Raumkurve c gibt es ∞^1 reelle Geraden und zwei isotrope, die starr mit dem begleitenden Dreibein der Kurve verbunden, bei Bewegung desselben längs c eine *Torse* überstreichen [7]. Wir fragen nach starr mit dem begleitenden Dreibein einer Kurve verbundenen Geraden, die bei *Bewegung des Dreibeins* längs c eine *Strahlfläche konstanten Dralls* ($\neq 0$) überstreichen.

Ist c durch den Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ gegeben — wobei s die Bogenlänge von c ist —, G ein Punkt mit den (festen) Koordinaten p, q, r und sind α, β, γ die (festen) Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{e}$ bezüglich des Dreibeins $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ von c, so lautet die von der durch G gehenden, zu $\mathfrak{e}$ parallelen Geraden bei der Bewegung des Dreibeins überstrichenen Strahlfläche

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(s, v) = \mathfrak{x}(s) + p\,\mathfrak{t}(s) + q\,\mathfrak{h}(s) + r\,\mathfrak{b}(s) + v[\alpha\,\mathfrak{b}(s) + \beta\,\mathfrak{h}(s) + \gamma\,\mathfrak{b}(s)] = \\ = \mathfrak{y}(s) + v\,\mathfrak{e}(s).\end{aligned} \tag{37}$$

Ist $\mathfrak{e}$ ein Einsvektor bzw. ein isotroper Vektor, so gilt

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ bzw. } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \tag{38}$$

Berechnet man nach (5) den Drall d von (37), so gilt, wenn K und T die Krümmung bzw. Torsion von c ist

$$AK^2 + BT^2 + CKT + DK + ET = 0, \tag{39}$$

wobei gesetzt wurde

$$\varrho A = q\alpha\gamma - p\beta\gamma - d(\alpha^2 + \beta^2),\ \varrho B = -q\alpha\gamma + r\alpha\beta - d(\beta^2 + \gamma^2),$$
$$\varrho C = q(\alpha^2 - \gamma^2) - p\alpha\beta + r\beta\gamma + 2d\alpha\gamma,\ \varrho D = -\alpha\gamma,\ \varrho E = \beta^2 + \gamma^2). \tag{40}$$

Soll der Drall d von (37) konstant sein, so sind die Koeffizienten in (39) konstant. Besteht zwischen Krümmung und Torsion keine quadratische Beziehung mit konstanten Koeffizienten (*allgemeiner Fall*), so müssen sämtliche Koeffizienten von (39) verschwinden und das liefert unter Beachtung von (38) und (40) nur zwei isotrope Lösungen

$$\mathfrak{X}(s, v) = \mathfrak{x} \pm i\,d\,\mathfrak{t} + v(\mp i\,\mathfrak{y} + \mathfrak{b}). \tag{41}$$

Satz 8: *Die i. a. einzigen mit dem begleitenden Dreibein einer Kurve c starr verbundenen Geraden, die bei der Bewegung des Dreibeins längs c eine Strahlfläche konstanten Dralls $d(\neq 0)$ überstreichen, sind zwei die Tangente normal schneidende isotrope Geraden, die von der Normalebene den Abstand $\pm id$ und gegen die Schmiegebene die Böschung $\pm i$ besitzen.* Diese beiden Geraden sind übrigens im Abstand $\pm id$ parallel zu jenen beiden isotropen Geraden, die bei der Bewegung Torsen überstreichen.

Darüber hinaus gibt es bei *besonderen Raumkurven*, für die eine Beziehung der Art (39) besteht, noch andere Geraden, die zu Strahlflächen konstanten Dralls führen. Eine genaue Diskussion dieser Verallgemeinerung des Problems der „*Cesàrokurven*" wird an anderer Stelle erfolgen, ein Sonderfall soll hier behandelt werden.

Wir suchen jene Kurven, bei denen im begleitenden Dreibein feste, *zur Tangente parallele Geraden* existieren, die Strahlflächen konstanten Dralls ($\neq 0$) überstreichen. Dazu hat man in (37) $\beta = \gamma = 0$ zu setzen und damit wird aus (39) (für $K \neq 0$)

$$d\,K - q\,T = 0; \tag{42}$$

die Kurve c ist also eine *Böschungslinie* mit der konstanten Böschung

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{T}{K} = \frac{d}{q} \tag{43}$$

gegen die (i. f. horizontal gedachte) Bezugsebene. Alle ∞^2 zu einer

Tangente von c parallelen Geraden erzeugen bei der Bewegung des Dreibeins von c Strahlflächen konstanten Dralls, und zwar stimmt der Drall für je ∞^1 Flächen überein, deren erzeugenden Geraden die Normalebene in einer zur Binormalen parallelen Geraden ($q = q_0$) durchsetzen:

$$\mathfrak{X}(s, v) = \mathfrak{x}(s) + q_0 \mathfrak{h} + r \mathfrak{b} + v \mathfrak{t} = \mathfrak{y}(s) + v \mathfrak{t}. \tag{44}$$

Die Striktionslinien dieser Flächen lauten unter Verwendung von (4) und (43)

$$\mathfrak{s}(s) = \mathfrak{y}(s) + r \operatorname{tg} \omega \, . \, \mathfrak{t}, \tag{45}$$

d. h. die Striktionslinien werden von den Punkten jener die Hauptnormale von c schneidenden Geraden erzeugt, die parallel zum *Darboux*-vektor

$$\mathfrak{d} = T \mathfrak{t} + K \mathfrak{b} = K(\operatorname{tg} \omega \, . \, \mathfrak{t} + \mathfrak{b}) \tag{46}$$

der Böschungslinie verläuft und daher lotrecht ist. Die auf diese Weise erzeugten Strahlflächen konstanten Dralls haben denselben Richtkegel wie die Kurve c, also einen Drehkegel (konische Krümmung $\tau : \varkappa = \operatorname{tg} \omega = \text{konst.}$). Windschiefe Strahlflächen konstanter konischer Krümmung mit konstantem Drall nennt *E. Kruppa* „*verallgemeinerte Böschungsflächen*" [3, S. 170].

Ist umgekehrt eine verallgemeinerte Böschungsfläche gegeben mit der Striktionslinie $\mathfrak{s}(u)$, so ist die Kurve

$$\mathfrak{x}(u) = \mathfrak{s}(u) - d \frac{\varkappa}{\tau} \mathfrak{n} \tag{47}$$

eine Böschungslinie mit der Böschung $\operatorname{tg} \omega = \dfrac{\tau}{\varkappa}$, wie man leicht bestätigt.

Satz 9: *Jede mit dem begleitenden Dreibein einer Böschungslinie starr verbundene, zur Tangente einer Anfangslage parallele Gerade überstreicht bei Bewegung des Dreibeins längs der Böschungslinie eine verallgemeinerte Böschungsfläche. Die Striktionslinien dieser verallgemeinerten Böschungsflächen werden dabei von den Punkten einer lotrechten Ebenen durch die Hauptnormale der Anfangslage beschrieben. Umgekehrt kann jede verallgemeinerte Böschungsfläche so erzeugt werden.*

Nach **1** kann jede Strahlfläche konstanten Dralls in eine verallgemeinerte Böschungsfläche verbogen werden.

Literatur

[1] *R. Edlinger*, Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 132, 343—351. (1923).

[2] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke. (1931).

[3] *E. Kruppa*, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 157, 143—176. (1949).

[4] *E. Kruppa*, Natürliche Geometrie der Mindingschen Verbiegung der Strahlflächen. Mh. Math. 55, 340—345. (1951).

[5] *K. Strubecker*, Differentialgeometrie I. Sammlung Göschen. (1955).

[6] *W. Schell-E. Salkowski*, Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 3. Aufl. Teubner. (1914).

[7] *E. Salkowski*, Die Cesàroschen Kurven. Sitzb. Akad. Wiss. München 524. (1911).

[8] *E. Kruppa*, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer. (1957).

[9] *E. Fabry*, Sur les courbes algébriques à torsion constante. Ann. de l'Éc. Norm. IX, 177—196. (1892).

[10] *G. Herberich*, Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. Progr. Luitpoldrealschule München. (1904).

Eine topologische Konstante

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingegangen am 2. April 1958)

Seien $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_s$ stetige eindeutige reelle Funktionen. Jedes f_i und ebenso jedes g_i hänge von r reellen Parametern $x_1, \ldots, x_r$ ab. Der Argumentbereich der Punkte $p = (x_1, \ldots, x_r)$ sei eine im r-dimensionalen Euklidischen Raume gelegene m-dimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit M. Es bezeichne $f(p)$ den Punkt $(f_1(p), \ldots, f_s(p))$ und $g(p)$ den Punkt $(g_1(p), \ldots, g_s(p))$ des s-dimensionalen Euklidischen Raumes E_s. Weiter existiere in E_s eine n-dimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit N derart, daß der Wertevorrat von f und ebenso von g in N liegt. Hierauf soll die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$f_1(x_1, \ldots, x_r) = g_1(x_1, \ldots, x_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_s(x_1, \ldots, x_r) = g_s(x_1, \ldots, x_r)$$

untersucht werden. Sind etwa die f_i linear und die g_i konstant, so läßt sich das Lösungsgebilde des Systems $\Sigma\, a_{1i}\, x_i = \beta_1, \ldots, \Sigma\, a_{si}\, x_i = \beta_s$ mit elementaren Hilfsmitteln der analytischen Geometrie beschreiben.

Bezeichne A die Menge aller Punkte p aus M mit $f(p) = g(p)$. Die Menge A ist kompakt, wie unten gezeigt wird. Sind $a \neq b$ Punkte aus A und $(c^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ eine a mit b innerhalb M verbindende Kurve, so mögen a und b zwei *„adäquate"* Punkte inbezug auf (f, g) heißen, *wenn die geschlossene Kurve*

$$(f(c^\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ g(c^\tau), 1 > \tau \geqslant 0)$$

innerhalb N nullhomolog ist. Man bestätigt leicht: sind a_1, a_2 adäquate Punkte und a_2, a_3 adäquate Punkte von (f, g), so sind auch a_1, a_3 adäquat. Es zerfällt also A in Adäquanzklassen, in Homologieadäquanzen, wie wir auch sagen wollen. Unten wird gezeigt: die Anzahl ζ der Adäquanzklassen von A ist endlich.

Sind $A_1, A_2, \ldots$ die Adäquanzklassen von A, so ist jedes A_i kompakt, und es existiert eine positive Zahl ε, so daß der Abstand $d(A_j, a_k) > \varepsilon$ für alle $j \neq k$. Bezeichnen $B_{m-n}(N)$ die $(m-n)$-dimensionale ganzzahlige Bettigruppe von N und B^0_{m-n} das Nullelement von $B_{m-n}(N)$, so ist unten eine eindeutige Abbildung ψ definiert, die jedem A_i ein Element $\psi(A_i)$ aus $B_{m-n}(N)$ zuordnet. Diejenigen A_i, für die

$$\psi(A) \neq B^0_{m-n},$$

mögen $A_1', A_2', \ldots$ heißen. Und es sei ζ' die Anzahl der A_i'. Dann gilt: *sind f' eine zu f und g' eine zu g homotope Abbildung von M in N, so hat die Gleichung $f'(p) = g'(p)$ wenigstens ζ' Lösungen.*

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darauf, zunächst die Abbildung ψ zu definieren und hierauf zu zeigen, daß die Definition möglich ist, sie beschränkt sich auf gewisse *Existenz*beweise. Die *Eindeutigkeit* der Definition wird in einer Fortsetzung bewiesen. Dabei ergibt sich, daß aus der Eindeutigkeit auch gleichzeitig die Homotopieinvarianz der oben definierten Zahl ζ' folgt. Für die weiteren Überlegungen bieten die Fälle mit $\dim P < \dim Q$ aus dem gleichen Grunde kein Interesse, aus dem etwa die Homotopietheorie der Sphären für Sphären S, T mit $\dim S < \dim T$ gegenstandslos ist.

1. Homologie- und Homotopieadäquanz

Zur Bezeichnungsweise im allgemeinen vergleiche man [3]. Die weiterhin benutzten Simplexe sind offen und gradlinig. Sind A ein solches Simplex und t eine topologische Abbildung von $\overline{A}$ in einen Euklidischen Raum E, so heiße $t(\overline{A} - A)$ Sphäre; wenn t überdies simplizial, so nennen wir $t(A)$ Zelle. Wenn B, C Mengen aus E, so ist $d(B, C)$ der Abstand dieser Mengen und $d(B)$ der Durchmesser von B. Für eindeutige Abbildungen f, f' von B in C bedeute $\sigma(f, f')$ die Menge aller Punkte p aus B mit $f(p) = f'(p)$. *Außer den Zeichen d und σ seien noch m, n, M, N, M^*, N^* bis zum Schluß dieser Arbeit festgelegt*: und zwar m, n, M, N wie in der Einleitung, M^* als eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M und N^* als eine solche von N.

Seien f, f' stetige Abbildungen von M in N und $(f^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ eine Homotopie stetiger Abbildungen von M in N mit $f^0 = f$, $f^1 = f'$ und den weiteren Eigenschaften:

$$f^0(p) = f^\tau(p) \text{ für alle } \tau, \text{ wenn } f(p) = f'(p);$$
$$f^0(p) \neq f^\tau(p) \text{ für alle } \tau > 0, \text{ wenn } f(p) \neq f'(p).$$

Dann mögen f, f' miteinander „*verwandte*" Abbildungen heißen.

Sind A ein $(m-n)$-Simplex, B ein n-Simplex und $A.B$ ein Punkt a, so existieren Punkte $a_1, \ldots, a_m$ derart, daß die Punkte $a, a_1, \ldots, a_m$ linear unabhängig sind und

$$a_i \in A \text{ für } i \leqslant m-n,\ a_i \in B \text{ für } i > m-n.$$

Weiter seien C ein $A+B$ enthaltendes m-Simplex, D ein n-Simplex, A^* die von $(a\, a_1 \ldots a_{m-n})$ in A, B^* die von $(a\, a_{m-n+1} \ldots a_m)$ in B und C^* die von $(a, a_1 \ldots a_m)$ in C induzierte Orientierung, D^* eine Orientierung von D. Seien ferner f, g stetige Abbildungen von $\overline{C}$ in D mit $\sigma(f,g) = \overline{A}$ und $h(p)$ für $p \in \overline{B} - B$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $g(p)$, schließlich x die von B^* in $\overline{B} - B$ und y die von D^* in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung. Dann heiße der klassische [4] Grad der Abbildung $h: x \to y$ auch der *„Grad"* schlechthin von B^* bezüglich (f, g, C^*, D^*).

Wenn φ, γ stetige Abbildungen von M in N, E ein in $\sigma(\varphi,\gamma)$ gelegenes $(m-n)$-Simplex, E inbezug auf $\sigma(\varphi,\gamma)$ offen und E^* eine Orientierung von E bezeichnen, so heiße der Grad von E^* bezüglich $(\varphi, \gamma, M^*, N^*)$ auch kürzer der Grad von E^* bei (φ,γ).

Sind f, g stetige Abbildungen von M in N, A die Menge $\sigma(f,g)$, ferner a, b Punkte aus A und existiert in M eine a mit b verbindende Kurve $(c^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ derart, daß

$$(f(c^\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ g(c^\tau), 1 > \tau \geqslant 0)$$

innerhalb N nullhomolog ist, so ist a ein *„zu b adäquater"* Punkt. Diese Definition ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, vermittelt also eine Klasseneinteilung von A in *Homologie*adäquanzen. Ersetzt man im vorstehenden „homolog" durch „homotop", so ergeben sich *Homotopie*adäquanzen. Diese letzteren werden jedoch im folgenden nicht weiter untersucht; zum Falle $\dim M = \dim N = 2$ vergleiche man auch [5].

Seien f, g stetige Abbildungen von M in N, A eine Adäquanzklasse von (f,g) und U eine in M offene Menge mit $A \subset U$. Jede Adäquanzklasse $\neq A$ von (f,g) sei zu $\overline{U}$ fremd. Nach Satz 3 und Satz 4 gibt es eine mit g verwandte Abbildung γ von M in N derart, daß

$$g \mid M - U = \gamma \mid M - U$$

und daß die Menge $\sigma(f \mid U, \gamma \mid U)$ ein endliches Polyeder P einer Dimension $\leqslant m-n$ ist. Seien K eine simpliziale Zerlegung von P, ferner $A_1, A_2, \ldots$ die $(m-n)$-Simplexe von K, x_i eine Orientierung von A_i und ξ_i der Grad von x_i bei (f,γ). Nach Satz 5 ist

$$(\Sigma\, \xi_i\, x_i) = 0.$$

Somit stellt $\varphi(\Sigma\, \xi_i\, x_i) = \gamma(\Sigma\, \xi_i\, x_i)$ *einen* $(m - n)$*-dimensionalen stetigen ganzzahligen Zyklus in* N *dar. Das durch diesen Zyklus repräsentierte Element der* $(m - n)$*-dimensionalen ganzzahligen Bettigruppe* $B_{m-n}(N)$ *von* N *werde* X *genannt. Setzt man dann*

$$\psi(A) = X,$$

so ist ψ *die in der Einleitung benutzte Abbildung.* Offenbar kann *man* ψ als eine Abbildung von A in $B_{m-n}(N)$ auffassen: Wenn p ein Punkt aus A und A_p das p enthaltende A_i ist, braucht man ja nur $\psi(p) = \psi(A_p)$ zu setzen. Wie man sich leicht überlegt, gibt es eine positive Zahl ε, so daß

$$\psi(p) = \psi(p'), \text{ wenn nur } d(p, p') < \varepsilon.$$

Sind q, q' Punkte aus A mit $\psi(q) \neq \psi(q')$ und $(c^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ eine q mit q' verbindende Kurve in M, ferner Q das $(f(c^\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ g(c^\tau),\ 1 > \tau \geqslant 0)$ enthaltende Element der ersten ganzzahligen Bettigruppe von N, so ist

$$Q \neq 0.$$

Es folgt jedoch aus $\psi(q) = \psi(q')$ nicht, daß q und q' im gleichen A_i liegen. Die Frage, ob man die A_i den Elementen einer gewissen endlichen Gruppe G derart eineindeutig zuordnen kann, daß ψ einen Homomorphismus: $G \to B_{m-n}(N)$ vermittelt (vergleiche hierzu [8]), wird im folgenden nicht mehr behandelt.

Satz 1. Das Lösungsgebilde ist kompakt, jede einzelne Adäquanzklasse ist kompakt.

Beweis. Sind f, g stetige Abbildungen von M in N, A die Menge $\sigma(f, g)$, a ein Punkt aus $\overline{A}$ und ε eine positive Zahl, so gibt es einen Punkt a' in A mit $d(f(a), f(a')) < \varepsilon$ und $d(g(a), (g(a')) < \varepsilon$. Alsdann ist $d(f(a), g(a)) \leqslant \leqslant d(f(a), f(a')) + d(f(a'), g(a')) + d(g(a'), g(a))$, wegen $f(a') = g(a')$ daher $d(f(a), g(a)) < 2\,\varepsilon$ unabhängig von der besonderen Wahl der Zahl ε, somit $f(a) = g(a)$.

Seien nun B eine Adäquanzklasse von (f, g) und b ein Punkt aus $\overline{B}$. Dann existieren eine n-Zelle N_1 in N, ein Punkt b' in B und eine b, b' verbindende Kurve C in M, so daß

$$f(C) + g(C) \subset N_1.$$

Man braucht nur ein b' mit hinreichend kleinem $d(b, b')$ zu wählen. Die geschlossene Kurve $f(C) + g(C)$ ist innerhalb N_1 nullhomotop, also

gehören b und b' zur gleichen Adäquanzklasse, daher $b \in B$, wie behauptet.

Satz 2. Die Anzahl der Adäquanzklassen ist endlich.

Beweis. Seien also wieder f, g stetige Abbildungen von M in N und A die Menge $\sigma(f, g)$. Es bedeute $B(p)$ für jeden Punkt p aus A die p enthaltende Adäquanzklasse. Dann wollen wir zunächst zeigen: es gibt eine positive Zahl ε derart, daß

$$B(p) = B(p') \text{ für alle } p,\ p' \text{ mit } d(p, p') < \varepsilon.$$

Offenbar existiert eine positive Zahl δ, so daß zu jeder Teilmenge N_1 von N mit $d(N_1) < \delta$ eine n-Zelle N_2 mit $N_1 \subset N_2 \subset N$ existiert.

Hierauf gibt es eine positive Zahl ε mit der Eigenschaft: sind p, p' Punkte aus A und $d(p, p') < \varepsilon$, so liegt in M eine p und p' verbindende Kurve C mit $d(f(C) + g(C)) < \delta$. Nach der Erklärung von δ gibt es daher weiter eine n-Zelle N_3, so daß $f(C) + g(C) \subset N_3 \subset N$. Daher ist die geschlossene Kurve $f(C) + g(C)$ in N nullhomotop, mithin p zu p' adäquat.

Angenommen nun, es seien $A_1, A_2, \ldots$ paarweis verschiedene abzählbar unendlich viele Adäquanzklassen von A. Bedeutet hierauf a_i einen Punkt aus A_i, so gibt es einen Punkt a in A, der Häufungspunkt der a_i ist. Dann liegt aber in jeder Nähe von a ein Punkt a' mit $B(a) \neq B(a')$: ein Widerspruch zur Erklärung von ε.

2. Geometrische Approximation der Adäquanzklassen

Bolzanoscher Nullstellensatz, Brouwerscher Fixpunktsatz und Abwandlungen des letzteren (vergleiche etwa [1]) gestatten Verallgemeinerungen auf Mannigfaltigkeiten und Kompakten. Auch unser obige Satz läßt sich als eine Verallgemeinerung der vorgenannten klassischen Sätze deuten. — Die Adäquanzklassen, die kompakte Mengen sind, sollen zunächst durch Polyeder einer Dimension $\leqslant m - n$ approximiert werden.

Satz 3. Seien U eine in M offene Menge, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in N mit $\sigma(f, g) \neq 0$ und $\sigma(f \mid \overline{U} - U, g \mid \overline{U} - U) = 0$. Dann gibt es eine stetige Abbildung γ von M in N mit $d(g, \gamma) < \varepsilon$ und $g \mid \overline{U} - U = \gamma \mid \overline{U} - U$ derart, daß $\sigma(f, \gamma)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqslant m - n$.

Beweis. Bezeichne A die Menge $\sigma(f, g)$. Nach Hilfssatz 1 existieren eine in M offene Menge V, so daß $A \subset V \subset U$ und $\overline{V}$ ein endliches Polyeder ist, und eine simpliziale Zerlegung K von $\overline{V}$ mit der Eigen-

schaft: zu jedem Simplex S aus K gibt es eine n-Zelle $Z(S)$ in N, so daß erstens

$$dZ(S) < \varepsilon,\ f(\overline{S}) + g(\overline{S}) \subset Z(S)$$

und zweitens $Z(S') \subset Z(S)$ für jede Seite S' von S.

Die in V gelegenen nichtleeren Simplexe aus K ordnen wir so in eine Reihe $S_1, S_2, \ldots, S_r$, daß für alle i die Beziehung

$$\dim S_i \leqslant \dim S_{i+1}$$

gilt. Weiter setzen wir $\gamma \mid \overline{U} - V = g \mid \overline{U} - V$. Wegen $\dim S_1 = 0$ ist $Z(S_1) - f(S_1) \neq 0$. Sei $\gamma_1(S_1)$ ein Punkt aus $Z(S_1) - f(S_1)$ und $\gamma_1 \mid \overline{V} - V = g \mid \overline{V} - V$.

Es bedeute nun j eine der Zahlen $1, \ldots, r-1$. Wir machen die für $j = 1$ richtige Annahme, es existiere eine stetige Abbildung

$$\gamma_j : (\overline{V} - V) + \Sigma_{i=1}^{j} S_i \to N,$$

die auf $\overline{V} - V$ mit g übereinstimmt und die weiteren Eigenschaften (1_j) bis (3_j) hat.

(1_j). Für alle i ist $\gamma_j(S_i) \subset Z(S_i)$.

(2_j). Es ist $\sigma(f, \gamma_j)$ ein endliches Polyeder P.

(3_j). Wenn $\dim S_i < n$, so ist $P \,.\, S_i$ leer. Wenn $\dim S_i \geqslant n$, so ist $\dim P.S_i \leqslant (\dim S_i) - n$.

Auf $\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}$ ist γ_j erklärt. Sind $T_1, T_2, \ldots$ die in $\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}$ gelegenen Simplexe aus K, so ist

$$\gamma_j(T_i) \subset Z(T_i) \text{ für alle } i.$$

Andererseits ist $Z(T_i) \subset Z(S_{j+1})$ für alle i. Mithin

$$\gamma_j(\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}) \subset Z(S_{j+1}).$$

Wegen (2_j) ist die Menge B aller Punkte p aus $\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}$ mit $f(p) = \gamma_j(p)$ ein endliches Polyeder.

Wenn $\dim S_{j+1} \leqslant n$, so ist B nach (3_j) leer; in allen übrigen Fällen gilt nach (3_j) die Ungleichung

$$\dim B \leqslant (\dim S_{j+1}) - (n+1).$$

Wir wenden nunmehr den nachstehenden Hilfssatz 2 an.

Dieser liefert eine stetige Abbildung φ von $\overline{S}_{j+1}$ in $Z(S_{j+1})$, die auf $\overline{Z}_{j+1} - Z_{j+1}$ mit γ_j übereinstimmt und die weiteren Eigenschaften hat: die Menge C aller Punkte $p \in \overline{S}_{j+1}$ mit $f(p) = \varphi(p)$ ist ein endliches Polyeder; für $\dim S_{j+1} < n$ ist C leer, sonst

$$\dim C \leqslant (\dim B) + 1.$$

Setzt man hierauf $\gamma_{j+1}(p) = \gamma_j(p)$ in allen Punkten p, für die $\gamma_j(p)$ definiert ist, und $\gamma_{j+1} \mid \overline{S}_{j+1} = \varphi$, so ist

$$\gamma_{j+1} : (\overline{V} - V) + \Sigma_{i=1}^{j+1} S_i \to N$$

eine stetige Abbildung, die die Eigenschaften (1_{j+1}) bis (3_{j+1}) hat.

Sei $\gamma \mid \overline{V} = \gamma_r$. Da $g(\overline{S}) + \gamma(\overline{S}) \subset Z(S)$ und $dZ(S) < \varepsilon$ für jedes Simplex S aus K, ist $d(g, \gamma) < \varepsilon$. Wegen (2_r) und (3_r) ist $\sigma(f, \gamma)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m - n$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Hilfssatz 1. Seien U eine in M offene Menge, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in N mit $f(p) \neq g(p)$ für alle Punkte $p \in \overline{U} - U$. Dann existieren eine in M offene Menge V, so daß $\sigma(f, g) \subset V \subset U$ und $\overline{V}$ ein endliches Polyeder ist, und eine simpliziale Zerlegung K von $\overline{V}$ mit der Eigenschaft: zu jedem Simplex S aus K gibt es eine n-Zelle $Z(S)$ in N, so daß erstens

$$dZ(S) < \varepsilon, \; f(\overline{S}) + g(\overline{S}) \subset Z(S)$$

und zweitens $Z(S') \subset Z(S)$ für jede Seite S' von S.

Beweis. Wenn die Menge $\sigma(f, g)$, die auch A heiße, leer, so ist nichts weiter zu beweisen. Seien nun $A \neq 0$ und r die Anzahl der echten Seiten eines n-Simplexes.

Dann gibt es Zahlen $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_m < \varepsilon$, die die Eigenschaften haben: wenn i eine der Zahlen $0, \ldots, m - 1$ und N_1 eine Teilmenge von N mit $d(N_1) < (r + 1)\,\varepsilon_i$, so existiert eine n-Zelle N_2 in N mit

$$N_1 \subset N_2 \text{ und } d(N_2) < \varepsilon_{i+1}.$$

Man braucht nur für alle i die Zahl ε_i hinreichend klein gegenüber ε_{i+1} zu wählen.

Sind nun V eine in M offene Menge mit $A \subset V \subset U$, $\overline{V}$ ein endliches Polyeder, K eine hinreichend feine simpliziale Zerlegung von $\overline{V}$ und V eine hinreichend gute Approximation von A, so erfüllt jedes Simplex S aus K die Relation

$$d(f(S) + g(S)) < \varepsilon_0,$$

und es gilt außerdem: zu jedem Eckpunkt e von K gibt es eine n-Zelle $Z(e)$ in N mit $f(e) \in Z(e)$, $g(e) \in Z(e)$ und $dZ(e) < \varepsilon_0$.

Sei j eine der Zahlen $0, \ldots, m - 1$. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, zu jedem Simplex S aus K mit $\dim S \leqq j$ existiere eine n-Zelle $Z(S)$ in N, so daß erstens $dZ(S) < \varepsilon_j$, $f(\overline{S}) + g(\overline{S}) \subset Z(S)$ und zweitens $Z(S') \subset Z(S)$ für jede Seite S' von S.

Hierauf bezeichne S_{j+1} ein $(j+1)$-Simplex aus K, und es seien S^i_{j+1} die echten Seiten von S_{j+1}. Dann hat die Menge

$$f(S_{j+1}) + g(S_{j+1}) + \Sigma_i Z(S^i_{j+1})$$

einen Durchmesser $< \varepsilon_0 + r\,\varepsilon_j < (r+1)\,\varepsilon_j$. Also gibt es in N eine n-Zelle $Z(S_{j+1})$, die die vorgenannte Menge enthält und einen Durchmesser $< \varepsilon_{j+1}$ hat.

Somit sind V und K von der verlangten Art.

Hilfssatz 2. Seien α, β natürliche Zahlen, A ein α-Simplex, B der β-dimensionale Euklidische Raum, ferner f, g stetige Abbildungen von $\overline{A}$ in B und $\sigma(f \mid \overline{A} - A,\ g \mid \overline{A} - A)$ ein endliches Polyeder C. Wenn $\alpha \leqslant \beta$, so sei C leer. Dann existiert eine stetige Abbildung γ von $\overline{A}$ in B mit $g \mid \overline{A} - A = \gamma \mid \overline{A} - A$ und den weiteren Eigenschaften: für $\alpha < \beta$ ist $\sigma(f, \gamma)$ leer, sonst ist $\sigma(f, \gamma)$ ein endliches Polyeder D und dim D = $= (\dim C) + 1$.

Beweis. Zunächst seien q ein Punkt aus A und $\gamma^*(q) = f(q)$; für $p \in \overline{A} - q$ weiter $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{A} - q$ aus q und $\lambda(p)$ die Zahl $d(p, q) \,/\, (d(p, q) + d(p, \overline{A} - A))$, alsdann $\gamma^*(p)$ der Punkt $f(p) + \lambda(p)\,(gw(p) - fw(p))$.

Wenn $\alpha \geqslant \beta$, so kann man $\gamma = \gamma^*$ setzen.

Sei nunmehr $\alpha < \beta$. Dann ist $\sigma(f, \gamma^*) = q$.

Es bedeute A_q ein α-Simplex mit $q \in A_q$ und $\overline{A}_q \subset A$. Für alle Punkte p aus $\overline{A}$ seien $\mu(p)$ die Zahl

$$d(p,\ q + (\overline{A} - A)) \,/\, [d(p, q + (\overline{A} - A)) + d(p, \overline{A}_q - A_q)]$$

und $\delta(p)$ die Zahl $d(f(p), f^*(p))$. Hierauf setzen wir $\gamma'(q) = \gamma^*(q)$, für $p \in \overline{A} - q$ weiter

$$\gamma'(p) = f(p) + \frac{1}{\delta(p)}\,(\gamma^*(p) - f(p))\,[\mu(p) + (1 - \mu(p))\,\delta(p)].$$

Dann stimmen die Abbildungen g und γ' auf $\overline{A} - A$ überein, es ist $\sigma(f, \gamma') = q$ und

$$d(f(p),\ \gamma'(p)) = 1 \text{ für } p \in \overline{A}_q - A_q.$$

Man kann nun zunächst $\gamma \mid \overline{A} - A_q = \gamma' \mid \overline{A} - A_q$ setzen.

Bedeutet S die $(\beta - 1)$-dimensionale Einheitssphäre, so wird durch $\varphi(p) = \gamma'(p) - f(p)$, $p \in \overline{A}_q - A_q$, eine stetige Abbildung φ der $(\alpha - 1)$-Sphäre $\overline{A}_q - A_q$ in S bestimmt. Wegen $\alpha < \beta$ ist φ unwesentlich. Daher gibt es eine stetige Abbildung

$$\varphi' : \overline{A}_q \to S,$$

die auf $\overline{A}_q - A_q$ mit φ übereinstimmt. Hierauf kann man $\gamma(p) = f(p) + \varphi'(p)$ für $p \in \overline{A}_q$ setzen.

Man bestätigt leicht:

Satz 4. Zu jeder stetigen Abbildung f von M in N existiert eine positive Zahl ε derart, daß jede stetige Abbildung f' von M in N, für die $d(f, f') < \varepsilon$ gilt, mit f verwandt ist.

3. Repräsentation der Homologieadäquanzen durch $(m—n)$-Zyklen

Die schon eingangs definierten Adäquanzklassen sollen nun durch ganzzahlige $(m - n)$-dimensionale endliche Euklidische Zyklen approximiert werden. Auf die Möglichkeit, die Adäquanzklassen als unendliche Vietoriszyklen [10] oder als singuläre Zyklen [9] zu deuten, sei wenigstens hingewiesen.

Satz 5. Seien U eine in M offene Menge, P ein in U gelegenes $(m - n)$-dimensionales endliches Polyeder, K eine simpliziale Zerlegung von P, weiter $A_1, A_2, \ldots$ die $(m - n)$-Simplexe von K und x_i eine Orientierung von A_i. Ferner seien f, g stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in N, $\sigma(f, g) = P$ und ξ_i der Grad von x_i bei (f, g). Dann ist $\Sigma\, \xi_i\, x_i$ ein $(m - n)$-dimensionaler ganzzahliger Zyklus.

Beweis. Bezeichnet B ein $(m - n - 1)$-Simplex aus K, das Seite von wenigstens einem A_i ist, so seien $A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}$ die A_i mit B als Seite, ferner y_{j_i} die von x_{j_i} in B induzierte Orientierung. Es bedeute y eine weitere Orientierung von B, und es sei ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem y und y_{j_i} gleich orientiert sind oder nicht. Zum Nachweis von Satz 5 ist dann zu zeigen, daß

$$\Sigma_i\, \varepsilon_i\, \xi_{j_i} = 0.$$

Die letztere Gleichung folgt, wenn $r = 1$, aus Satz 6, wenn $r > 1$, aus Satz 7.

Satz 6. Seien S ein m-Simplex, T ein n-Simplex, A ein $(m - n)$-Simplex, B eine $(m - n - 1)$-Seite von A und $A + B \subset S$. Ferner seien f, g stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in $\overline{T}$ mit $\sigma(f, g) = \overline{A}$. Dann ist der Grad von A bei (f, g) gleich Null.

Beweis. Ist q ein Punkt aus A, so gibt es von τ stetig abhängende n-Simplexe C^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, in S derart, daß $\overline{A}.(\overline{C}^\tau - C^\tau) = 0$ für alle τ, $\overline{A}.C^0$ leer und $\overline{A}.C^1 = q$. Für alle (p, τ) mit $p \in \overline{C}^\tau - C^\tau$ und $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ sei $h^\tau(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$. Dann

ist die Abbildung $h^0 : \overline{C}^0 - C^0 \to \overline{T} - T$ unwesentlich, daher auch h^1 unwesentlich und also Satz 6 richtig.

Satz 7. Seien S ein m-Simplex, T ein n-Simplex, B ein $(m-n-1)$-Simplex in S und $A_1, A_2, \ldots$ endlich viele paarweis zueinander fremde $(m-n)$-Simplexe aus S mit B als gemeinsamer Seite, ferner A_i^*, B^*, S^*, T^* beziehungsweise eine Orientierung von A_i, B, S, T, schließlich B_i^* die von A_i^* in B induzierte Orientierung. Weiter seien f, g stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in $\overline{T}$, $\sigma(f,g) = \Sigma \overline{A}_i$ und α_i der Grad von A_i^* bezüglich (f, g, S^*, T^*). Dann ist

$$\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = 0,$$

wobei ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem B^* und B_i^* gleich orientiert sind oder nicht.

Beweis. Es liege S in dem m-dimensionalen Euklidischen Raume E, seien H eine B enthaltende $(m-1)$-dimensionale Ebene und H_1, H_2 die beiden offenen Halbräume, aus denen $E - H$ besteht. Man kann annehmen, daß

$$A_1 \subset H_1 \text{ und } A_i \subset H_2 \text{ für } i > 1.$$

Es läßt sich weiter annehmen, daß die Trägerebene von ΣA_i die Dimension $m - n + 1$ hat.

Hierauf existieren ein $(n+1)$-dimensionaler offener Würfel U in S und einander gegenüberliegende offene n-Seiten V, W von U mit den Eigenschaften: der Mittelpunkt q von U liegt in B, für alle i ist der Durchschnitt $A_i.(\overline{U} - U)$ ein Punkt a_i, ferner

$$a_1 \in V \text{ und } a_i \in W \text{ für } i > 1.$$

Weiter sei jedem a_i eine Euklidische $(n-1)$-Sphäre X_i mit a_i als Mittelpunkt zugeordnet, so daß

$$X_1 \subset V \text{ und } X_i \subset W \text{ für } i > 1$$

und daß die $X_1, X_2, \ldots$ paarweis zueinander fremd sind. Für $p \in X_i$ sei $h_i(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$.

Es bezeichne U^* eine Orientierung von U und W^* die von U^* in W induzierte Orientierung. Ist Y_i die konvexe Hülle von X_i und Y_i^* die von U^* in Y_i induzierte Orientierung, so bedeute X_i^* die von Y_i^* in X_i induzierte Orientierung. Seien T' die von T^* in $\overline{T} - T$ induzierte Orientierung und ξ_i der Grad der Abbildung

$$h_i : X_i^* \to T'.$$

Dann gilt, wie wir nunmehr zeigen wollen, $\xi_1 = -\Sigma_{i>1} \xi_i$. Auf die letzte

Gleichung soll anschließend die Beziehung $\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = 0$ zurückgeführt werden.

Für jeden Punkt p aus $\overline{W} - W$ bezeichne $h(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$. Seien W' die von W^* in die $(n-1)$-Sphäre $\overline{W} - W$ induzierte Orientierung und ξ der Grad der Abbildung

$$h: W' \to T'.$$

Da die Punkte $a_2, a_3, \ldots$ die einzigen Punkte p aus $\overline{W}$ mit $f(p) = g(p)$ sind, ist

$$\xi = \Sigma_{i>1} \xi_i,$$

das heißt der Grad von h gleich der Summe der Grade der Abbildungen $h_2, h_3, \ldots$

Offenbar gibt es auf $\overline{U} - U$ von τ stetig abhängende $(n-1)$-Sphären $(Z^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ mit $Z^0 = X_1, Z^1 = \overline{W} - W$ und der Eigenschaft, daß $f(p) \neq g(p)$ in allen (p, τ), für die $p \in Z^\tau$ und $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Bezeichnet daher $h^\tau(p)$ in allen (p, τ) der vorgenannten Art die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$, so ist $h^0 = h_1$ und $h^1 = h$. Wenn W'' die von $X_1{}^*$ vermöge $(Z^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ in $\overline{W} - W$ induzierte Orientierung, so gilt

$$W' = - W''.$$

Der Grad ändert sich längs der Homotopie $(h^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ nicht. Mithin

$$\xi_1 = - \xi,$$

somit $\xi_1 = - \Sigma_{i>1} \xi_i$, wie behauptet.

Sind $n_1 + n_2 = n_3$ natürliche Zahlen, S_i ein n_i-Simplex, p ein Punkt aus S_3, der Durchschnitt $S_1 \,.\, S_2 = p$, $S_1 + S_2 \subset S_3$, weiter

$$p, p_1, p_2, \ldots, p_{n_3}$$

linear unabhängige Punkte mit $p_i \in S_1$ für $i \leqslant n_1$ und $p_i \in S_2$ für $i > n_1$, ferner $S_1{}^*$ die Orientierung $(p\, p_1 \ldots p_{n_1})$ von S_1, $S_2{}^*$ die Orientierung $(p\, p_{n_1+1} \ldots p_{n_3})$ von S_2 und $S_3{}^*$ die Orientierung $(p\, p_1 \ldots p_{n_3})$ von S_3, so heiße $S_1{}^*$ auch „die von $(S_2{}^*, S_3{}^*)$ in S_1 induzierte Orientierung".

Wenn A_j eines der Simplexe A_i und $A_j{}^*$ durch die entgegengesetzte Orientierung ersetzt wird, so wechselt sowohl α_j wie ε_j das Vorzeichen. Zum Beweis der Gleichung $\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = 0$ kann man daher statt der vorgegebenen Orientierungen $A_i{}^*$ auch andere Orientierungen der A_i zugrundelegen.

Dies soll nun geschehen: Es sei A_i' die von $(Y_i{}^*, S^*)$ in A_i induzierte Orientierung und α_i' der Grad von A_i' bezüglich (f, g, S^*, T^*). Dann ist

$$\alpha_i' = \xi_i \text{ für alle } i, \text{ also } \alpha_1' = - \Sigma_{i>1} \alpha_i'.$$

Bedeutet B_i' die von A_i' in B induzierte Orientierung, so ist

$$B_1' = -B_i' \text{ für } i > 1.$$

Wenn ε_i' gleich 1 oder -1, je nachdem B^* und B_i' gleich orientiert sind oder nicht, so ist daher weiter

$$\varepsilon_1' = -\varepsilon_i' \text{ für } i > 1,$$

mithin $\Sigma \alpha_i' \varepsilon_i' = 0$ oder $\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = 0$, was zu beweisen war.

Sind f, g stetige Abbildungen von M in N, so entspricht ihnen nach den Ausführungen der Einleitung ein gewisser sämtliche Adäquanzklassen repräsentierender $(m-n)$-Zyklus. Sind nun f' eine zu f und g' eine zu g homotope Abbildung, so entspricht auch dem Abbildungspaar (f, f') ein $(m-n)$-Zyklus z_f und dem Paar (g, g') ein $(m-n)$-Zyklus z_g. Hierauf erhebt sich die Frage, ob z_f und z_g homolog sind, wenn f und g homolog. Wenn $g(M)$ ein Punkt aus N, so gelangt man zu Fragen, die für die Ebene mit Problemen aus [6] und [7] verwandt sind. Die obige Voraussetzung, M und N seien orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeiten, dient lediglich dem Zwecke, die folgenden Beweise abzukürzen; wenn man allgemeinere Mengen zugrundelegt, etwa Retrakte im Sinne von [2], bleiben die obigen Sätze mutatis mutandis richtig.

Literatur

[1] *G. Aumann:* Reelle Funktionen. Berlin (1954), 192–196.

[2] *K. Borsuk:* Sur les rétractes. Fund. Math. 17 (1931), 152–170.

[3] *N. Bourbaki:* Topologie générale, Dictionnaire. Actualités Sci. et Ind. 1084 (1949), 73–99.

[4] *L. E. J. Brouwer:* Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), 97–115.

[5] *S. Bundegaard* und *J. Nielsen:* Vereinheitlichte Beweise einiger Sätze aus der Flächentopologie. Mat. Tidsskr. B (1946), 1–16.

[6] *M. Dolcher:* Due teoremi sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni piane continue. Rend. Mat. Padova 17 (1948), 97–101.

[7] *T. Rado* und *P. V. Reichelderfer:* Continuous Transformations in Analysis. Grundlehren d. math. Wiss. 75 (1955).

[8] *B. Segre:* Lezioni di geometria moderna. Bologna (1948), 22–30.

[9] *H. Seifert* und *W. Threlfal:* Lehrbuch der Topologie. Leipzig (1934).

[10] *L. Vietoris:* Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97 (1927), 454–472.

On the Minimum Order of Graphs with Given Automorphism Group*

By

Gert Sabidussi, New Orleans, La., USA.

(*Received May 16, 1958*)

1. Introduction

Given a finite group G define $\alpha(G)$ to be min $\alpha_0(X)$, the minimum taken over all graphs X whose automorphism group $G(X)$ is isomorphic to G ($\alpha_0(X)$ denotes the number of vertices of X). By a *graph* X we mean a *finite* set $V(X)$ (the set of *vertices* of X) together with a set $E(X)$ (the set of *edges* of X) of unordered pairs of *distinct* elements of $V(X)$. We shall indicate unordered pairs by brackets. The automorphism group of a graph X, i. e. the group of all one-one functions φ of $V(X)$ onto $V(X)$ such that $[x, y] \varepsilon E(X)$ implies $[\varphi x, \varphi y] \varepsilon E(X)$, will be denoted by $G(X)$.

It is known ([1], p. 377) that

$$\alpha(G) = O(mn),$$

where m is the order of G, and n is the minimal number of generators of G. More precisely, $\alpha(G) \leqq 2mn$, if $n \geqq 2$. By refining the method of [1] we shall prove:

Theorem 1: $\alpha(G) = O(m \log n)$.

In view of the fact that $n = O(\log m)$ (cf. [1], p. 378) we have:

Corollary: $\alpha(G) = O(m \log \log m)$.

The proof consists of constructing a graph X such that $G(X) \cong G$, and $\alpha_0(X) = O(m \log n)$. Concerning the construction of X two facts should be emphasized. First, our method always yields a result of the form $\alpha(G) \leqq m f(n)$. Hence, no matter how effectively $f(n)$ can be improved upon, one cannot hope to obtain anything like a best possible

* Written with the support of the National Science Foundation of the United States of America.

estimate (for the symmetric group S_m of order $m!$, $\alpha(S_m) = m$, while our method gives $\alpha(S_m) \leqq m!\, f(2)$). Second, it appears that the result $f(n) = O(\log n)$ cannot be further refined in any substantial way; for instance, it seems to be impossible to obtain $f(n) = O(\log \log n)$.

In the simple case that G is the cyclic group Z_m of order m it is known ([1], p. 371) that $\alpha(Z_3) \leqq 10$, and $\alpha(Z_m) \leqq 3\,m$ if $m \geqq 4$.
With little effort one obtains:

Theorem 2:

$$\alpha(Z_m) = \begin{cases} 2, & \text{if } m = 2 \\ 3\,m, & \text{if } m = 3, 4, 5 \\ 2\,m, & \text{if } m = p^e \geqq 7, \text{ where } p \text{ is prime} \\ \alpha(Z_{p_1^{e_1}}) + \ldots + \alpha(Z_{p_r^{e_r}}), & \text{if } m = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}, \\ & \text{where } p_1, \ldots, p_r \text{ are distinct primes.} \end{cases}$$

2. Proof of Theorem 1

Let w be a given positive integer. By $M_1, \ldots, M_r$, $r = 2^w - 1$, denote the non-empty subsets of the set $M = \{1, \ldots, w\}$, and form all products $M_{i_k} \times M_{j_k}$, $1 \leqq i_k \leqq r$, $1 \leqq j_k \leqq r$, $k = 1, \ldots, r^2$. Given a finite group G of order m, let w be the smallest positive integer for which $r^2 \geqq n$, where n is the minimum number of generators of G. Clearly $w = O(\log n)$.

Now let $\{h_1, \ldots h_n\}$ be a set of generators of G, and define a graph X as follows:

$$V(X) = \{(g, i) \mid g \in G, 0 \leqq i \leqq w\} \cup \{(g, i') \mid g \in G, 0 \leqq i \leqq w + 1\},$$

$$\begin{aligned} E(X) = {} & \{[(g, i), (g, i')] \mid g \in G, 0 \leqq i \leqq w\} \cup \\ & \{[(g, i - 1), (g, i')] \mid g \in G, 1 \leqq i \leqq w + 1\} \cup \\ & \{[(g, 0), (g', 1)], [(g, 1), (g', 1)], [(g, (w + 1)'), (g', (w + 1)')] \mid \\ & g \in G, g' = gh_k, \ 1 \leqq k \leqq n\} \cup \\ & \{[(g, x), (g', y)] \mid g \in G, g' = gh_k, (x, y) \in M_{i_k} \times M_{j_k}, 1 \leqq k \leqq n\}. \end{aligned}$$

Note that $\alpha_0(X) = m(2\,w + 3) = O(m \log n)$. It remains to prove that $G(X) \cong G$. For any $g' \in G$ define $\varphi_{g'} : V(X) \to V(X)$ by $\varphi_{g'}(g, x) = (g'\,g, x)$, $g \in G$. Then clearly $G' = \{\varphi_{g'} \mid g' \in G\}$ is a subgroup of $G(X)$ isomorphic to G.

It is immediate from the definition of X that each $(g, 0')$, $g \in G$, is of degree 1; (g, x'), where $g \in G$, $x = 1, \ldots, w + 1$, is of degree 2; all other vertices of X are of degree $\geqq 2$. Let $\varphi \in G(X)$. Then $\varphi(g, 0')$ is of degree 1; hence $\varphi(g, 0') = (g', 0')$ for some $g' \in G$. $(g, 0)$ is the only vertex of X joined with $(g, 0')$. Likewise, $(g', 0)$ is the only vertex joined

with $(g', 0')$. Hence $\varphi(g, 0) = (g', 0)$. This in turn implies $\varphi(g, 1') = (g', 1')$, etc., and we obtain $\varphi(g, x) = (g', x)$ for all $x = 0', 0, 1', 1, \ldots, w, (w+1)'$. The crucial fact here is that at least every other vertex in the sequence $(g, 0'), (g, 0), (g, 1'), (g, 1), \ldots, (g, w), (g, (w+1)')$ is of degree 2.

Now let $\varphi \in G(X)$ be such that $\varphi(g, 0') = (g, 0')$ for some fixed $g \in G$. By the previous argument, $\varphi(g, x) = (g, x)$, $x = 0', 0, \ldots, w, (w+1)'$. Suppose $g', g'' \in G$ are such that $[(g, 1), (g', 1)]$ and $[(g, 1), (g'', 1)]$ are edges of X, and suppose that $\varphi(g', 1) = (g'', 1)$. Then either $g' = gh_k$, $g'' = gh_{k'}$ or $g' = gh_k^{-1}$, $g'' = gh_{k'}^{-1}$. Assume $g' = gh_k$. Then $\varphi(g', 1) = (g'', 1)$ implies $\varphi[(g, 0), (g', 1)] = [(g, 0), (g'', 1)] \in E(X)$. Hence by definition of $E(X)$, $g'' = gh_{k'}$. Similarly, if $g' = gh_k^{-1}$. Now $g' = gh_k$, $g'' = gh_{k'}$, and $g' = gh_k^{-1}$, $g'' = gh_{k'}^{-1}$ each imply $M_{i_k} = M_{i_{k'}}$, $M_{j_k} = M_{j_{k'}}$, whence $k = k'$, so that $g' = g''$. This shows that if (g', y) is joined with some (g, x) then (g', y) is invariant under φ. An inductive argument then proves that φ is the identity on the whole set $V(X)$.

Let $\psi \in G(X)$, $(g, x) \in V(X)$, then in view of the fact that $\psi(g, x) = (g', x)$ there is a $g'' \in G$ such that $\varphi_{g''} \psi(g, x) = (g, x)$. Hence $\varphi_{g''} \psi = 1$, so that $\psi \in G'$. Hence $G(X) = G' \cong G$.

3. Proof of Theorem 2

In view of the triviality of $\alpha(Z_2) = 2$, we can assume that $m \geqq 3$.

Case (1): $m = p^e \geqq 7$. Let $X(m)$ be the following graph:

$$V(X(m)) = \{1, \ldots, m, 1', \ldots, m'\},$$

$$E(X(m)) = \{[i, i+1], [i, i'], [i+1, i'], [i-2, i'] \mid 1 \leqq i \leqq m\},$$

where addition is modulo m.

Clearly $\psi : V(X(m)) \to V(X(m))$ given by $\psi\, i = i + 1$, $\psi\, i' = (i+1)'$, $i = 1, \ldots, m$, is an automorphism of $X(m)$; hence $G(X(m))$ contains a subgroup isomorphic to Z_m.

Note that the m-circuit C formed the vertices $1, \ldots, m$ is the only m-circuit of $X(m)$ whose vertices are of degree 5 in $X(m)$. Hence C remains invariant under all automorphisms of $X(m)$. In particular, if $\varphi \in G(X(m))$ is such that $\varphi\, i_0 = i_0$ for some $i_0 \in V(C)$, then either $\varphi \mid C = 1$ or $\varphi(i_0 + j) = i_0 - j$, $j = 1, \ldots, m$. Note that all 3-circuits of $X(m)$ are of the form $i, i+1, i'$, $1 \leqq i \leqq m$. Hence if $\varphi(i_0 + j) = i_0 - j$ it follows that $\varphi\, i_0' = (i_0 - 1)'$. But then $\varphi[i_0', i_0 - 2] = [(i_0 - 1)', i_0 + 2] \in E(X(m))$, a contradiction since $m \geqq 7$. Hence $\varphi \mid C = 1$, and therefore $\varphi = 1$. It follows that $G(X(m)) \cong Z_m$. $\alpha_0(X(m)) = 2m$, hence $\alpha(Z_m) \leqq 2m$.

To complete the proof that $\alpha(Z_m) = 2m$ assume that there is a graph Y with $G(Y) \cong Z_m$ and $\alpha_0(Y) < 2m$. Since $m = p^e$ it follows that if $\varphi \in G(Y)$ and $y \in V(Y)$, then either $y, \varphi y, \ldots, \varphi^{m-1} y$ are all distinct, or else $\varphi y = y$. In either case $G(Y) \cong D_{2m}$ (= the dihedral group of order $2m$), a contradiction. Hence $\alpha(Z_m) = 2m$.

Case (2): $m = 3, 4, 5$. Here we define $X(m)$ by

$$V(X(m)) = \{1, \ldots, m, 1', \ldots, m', 1'', \ldots, m''\},$$

$$E(X(m)) = \{[i, i+1], [i, i'], [i+1, i''], [i', i''], [i'', (i+1)''], [i'', i+1] \mid 1 \leqq i \leqq m\} \qquad \text{(addition modulo } m\text{)}, \; m = 3, 4, 5.$$

Obviously $\alpha_0(X(m)) = 3m$. The proof that $G(X(m)) \cong Z_m$, and that $\alpha(Z_m) = 3m$ is similar to that in case (1).

Case (3): $m = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$. Consider the graph

$$X = X(p_1^{e_1}) + \ldots + X(p_r^{e_r}).$$

Since $X(m)$ and $X(m')$ are non-isomorphic whenever $m \neq m'$, it follows that

$$G(X) \cong G(X(p_1^{e_1})) \times \ldots \times G(X(p_r^{e_r})) \cong Z_{p_1^{e_1}} \times \ldots \times Z_{p_r^{e_r}} \cong Z_m.$$

Hence

$$\alpha(Z_m) \leqq \sum_{i=1}^{r} \alpha_0(X(p_i^{e_i})) = \sum_{i=1}^{r} \alpha(Z_{p_r^{e_r}}),$$

and an argument analogous to that in case (1) then shows that there is actual equality.

References

[1] *Frucht, R.*, Graphs of degree 3 with given abstract group. Canad. J. Math. **1** 365—378. (1949).

On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes — II

By

Z. A. Lomnicki and S. K. Zaremba

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Received June 2nd, 1958)

13. Introduction to the second part

In the introduction to the first part* of the present paper the authors, mentioning the method of m-dependent variables as an alternative to their own line of attack, expressed the view, borne out by the subsequent publication of a very ingenious note by *Parzen* [26], that this method was capable of yielding further results concerning the various asymptotic distributions which arise in the theory of linear stochastic processes. Nevertheless, quite apart from the drawbacks which were pointed out in Section 1, and are inherent in the use of m-dependent variables, it is not quite clear how this method could be applied to statistics which, like most of those treated below, are much more complex than the expressions apparently contemplated by Parzen. On the other hand, a certain streamlining of the approach developed in Part I makes it possible to obtain the asymptotic moments and distributions of such statistics without making efforts greatly in excess of those which, in any case, would be required to obtain their asymptotic variances and covariances, while, owing to the device introduced in Section 8, higher moments of the random variables generating the process need not be postulated, unless higher moments of the relevant statistics are required.

This second part is entirely devoted to statistics containing unbounded numbers of sample covariances. Whereas the few expressions of this kind considered in Part I (namely in Section 10) could be dealt with

---

* Vol. 61 (1957), pp. 318—358. Sections, propositions, and formulae, as well as references to the literature, are numbered here in continuation of Part I.

by means of Theorem 6.2, the cases treated below require a more thorough analysis of the remainder terms of the moments. In particular, the two sections which follow discuss, in their whole generality, the truncated and "raw" periodograms, and also their reduced versions, which are obtained by substituting, in them, the autocorrelation function for the covariance function. The next object of study is the mean, over the frequency range, of the squared difference between the spectral density function and the truncated, or the "raw", periodogram. This statistic represents, in the space of trigonometric series, a natural norm of the difference of the pair of functions in question, and was proposed as a figure of merit of the corresponding estimate [14]; in both cases this norm is found to be asymptotically normally distributed.

The arguments and computations used to obtain these results are further applied to the study of estimators of the infinite sum of the squared covariances of a process:

$$\mathfrak{S}_2 = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_q^2 = \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega)]^2 \, d\omega \tag{13.1}$$

[where $F'(\omega)$ is the spectral density function, given by (10.1)]. Although *Grenander* and *Rosenblatt* [7], when defining a class of estimators of this quantity, appeared to have in mind only the establishment of confidence bands for the incomplete integral of the periodogram, it is felt that in assessing the real importance of $\mathfrak{S}_2$ the emphasis should be laid elsewhere: Heuristically speaking, when the estimation of the spectral density function of a process is attempted by means, for instance, of the truncated periodogram, it is clearly desirable to include in the estimate terms depending on relatively trustworthy estimates of covariances, and to exclude those in which the sample covariances are predominantly spurious. Since the variances of the sample covariances tend to increase for large lags, while the "true" covariances are assumed to tend to 0, the best truncation point of the periodogram corresponds to the lag for which the standard deviation of the sample covariances overtakes their expectation [14]. It is also easily seen that the periodogram truncated at the wrong point is capable of being, in a sense, an arbitrarily bad estimator of the spectral density function, and that any alternative type of estimator is bound to depend on some parameter, the choice of which is as critical as that of the number of terms in the truncated periodogram. Unless some *a priori* information about the parameters of the process is given, it is, therefore, essential to be

able to estimate the variances of the sample covariances. But, according to well-known formulae [cf. e.g. Theorem 5.1],

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}(N-|k|)\ \mathrm{var}\ C_{k,N}=\mathfrak{S}_2,$$

where $C_{k,N}$ are the sample covariances defined by (6.7); hence the crucial importance of $\mathfrak{S}_2$ in statistical spectral analysis.

While *Grenander* and *Rosenblatt* (*loc. cit.*), confining themselves to questions of consistency, only showed that the estimators proposed by them tended to $\mathfrak{S}_2$ in probability, it will be proved here that these estimators are asymptotically normally distributed with variances inversely proportional to the sample sizes. However, these estimators depend on two arbitrary parameters, and their bias is not always acceptable; these serious drawbacks will be avoided by introducing an alternative estimator, which will be shown to be also asymptotically normal, with a variance of the same order of magnitude as that of the expressions mentioned above. Analogous estimation problems connected with the reduced spectrum are solved with little additional effort. Separate publications will deal with applications of these results to the difficult problems of estimating the spectral density function of a process, and of testing the fit of a spectrum which is given *a priori*.

14. The moments and distributions of some estimators of the spectral density function and of certain related expressions

In what follows it is assumed, as before, that x_t is given by

$$x_t=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_{t-k}\,\varepsilon_k \qquad (t=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{2.1}$$

with $h_i=0$ whenever $i<0$, $\Sigma|h_k|$ being convergent, and ε_t $(t=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ being random variables. The process will be said to satisfy the condition $H_{2Q}(Q\geq 1)$ if there exists a numerical sequence $\mu_1=0,\mu_2,\ldots,\mu_{2Q}$ such that

$$E(\varepsilon_{t(1)}^{\nu(1)}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_{t(s)}^{\nu(s)})=\mu_{\nu(1)}\cdot\ldots\cdot\mu_{\nu(s)}$$

whenever $\nu(1),\ldots,\nu(s)>0$ and $\nu(1)+\ldots+\nu(s)\leq 2Q$; this is the condition of applicability of Lemma 2.1. If, moreover, the process is strictly stationary, the ε's being independent, $\{x_t\}$ will be said to satisfy the condition H_{2Q}^{*}; with $Q=2$, this is the condition of validity of Theorem 8.1.

The estimators of the spectral density function $F'(\omega)$ of $\{x_t\}$ which are treated below are all of the type (mentioned in Section 10) of

$$Z'_N(\omega) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N} C_{k,N} \cos 2\pi k\omega, \tag{14.1}$$

where $\{C_{k,N}\}$ are given by (6.7), and $\{\lambda_{k,N}\}$ are suitably chosen functions of k and N which, in any case, satisfy $\lambda_{-k,N} = \lambda_{k,N}$ and $|\lambda_{k,N}| \leq 1$. In particular, if

$$\lambda_{k,N} = \begin{cases} 1 - N^{-1}|k| & \text{when } |k| \leq \nu; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{14.2}$$

$Z'_N(\omega)$ becomes the truncated periodogram $T_N^{(\nu)}(\omega)$. It will be remembered [14] that $T_N^{(\nu)}(\omega)$ is a consistent estimator $F'(\omega)$ if, and only if,

$$\nu \to \infty \text{ and } \nu/N \to 0 \text{ when } N \to \infty. \tag{14.3}$$

Under the additional hypothesis (which, however, can be easily dispensed with) that $h_k = O(k^{-2})$, and assuming $H_4{}^*$ (which can be immediately relaxed to H_4), *Grenander* and *Rosenblatt* ([24], p. 148) computed the variance of the truncated periodogram at any frequency. They pointed out its exceptional behaviour at zero frequency, but failed to perceive that the same thing happened at the ends of the frequency range, i.e. at $\omega = \pm \frac{1}{2}$ according to our notations, and $\lambda = \pm\pi$ according to theirs; indeed, in their formula for $w_N(x)$ given in the middle of the page, the two fractions in brackets are equal not only when $\lambda = 0$, but also when $\lambda = \pm\pi$, so that, in the latter case

$$w_N(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin[(m + \frac{1}{2})(x - \pi)]}{\sin(\frac{1}{2}(x - \pi))},$$

which, introduced into the formula given on p. 134 of the same book, doubles the value of the variance. Using the same kind of method, one can readily prove that the values of the periodogram corresponding to different frequencies are asymptotically uncorrelated. Thus H_4 and (14.3) entail

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N \operatorname{cov}[T_N^{(\nu)}(\omega_1), T_N^{(\nu)}(\omega_2)]}{2\nu + 1} = \begin{cases} 2[F'(\omega_1)]^2 & \text{if } |\omega_1| = |\omega_2| = 0 \text{ or } \frac{1}{2}; \\ [F'(\omega_1)]^2 & \text{if } 0 \neq |\omega_1| = |\omega_2| \neq \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{if } |\omega_1| \neq |\omega_2|. \end{cases} \tag{14.4}$$

Proposition 14.1. Under the assumption $H_{2Q}(Q \geq 2)$ if, moreover, (14.3) holds, and if a finite set $\{\omega_2, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies is given, the random variables

$$(2\nu + 1)^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} \{T_N^{(\nu)}(\omega_i) - E[T_N^{(\nu)}(\omega_i)]\} \quad (i = 1, \ldots, s) \qquad (14.5)$$

have univariate and mixed moments up to the order Q tending, when $N \to \infty$, to the corresponding moments of the normal multivariate distribution specified by (14.4).

Proof. Any of the moments under consideration is a linear combination of multivariate and mixed moments of $C_{0,N}, \ldots, C_{\nu,N}$. According to Theorem 6.2, each of these moments is composed of a main part, explicitly given by (6.8), and of some remainder terms; it was observed in Section 7 that these main parts were equal to the corresponding moments of the normal multivariate distribution determined by the second moments. Hence these main parts add up to values which would be obtained for the moments of (14.5) if the sample covariances, and, therefore, also (14.5), were exactly normally distributed. What remains to be proved is only that the sum of the remainder terms multiplied by $(2\nu + 1)^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}$ tends to 0 as $N \to \infty$.

As shown in Sections 5 and 6, every moment of $C_{0,N}, \ldots, C_{\nu,N}$ of order $n (n \leq Q)$ is the sum of a number (independent of N) of terms, each of which can be factorized into a product of multiple sums with respect to a total of n variables, which will be denoted as before by $\beta(1), \ldots, \beta((2)$. Each of the irreducible factors is homogeneous of a necessarily even degree in the h's, the overall degree of each term being $2n$. It was further shown that terms containing quadratic factors cancelled out exactly, while products of quartic terms formed the main parts of the moments. Hence each remainder term contains at least one irreducible factor of degree not lower than 6, and no factor of a degree lower than 4.

Clearly, the absolute value of the sum of the remainder terms will not decrease if, in each of them, the cosines are omitted and the h 's are replaced by their absolute values. It is now convenient to group together similar terms arising out of the various individual moments of sample covariances. Thus the number of lumped remainder terms becomes independent of N, while in each of them the sum is taken not only with respect to $\beta(1), \ldots, \beta(n)$, but also with respect to a new set of dummy variables, which will be denoted by $k(1), \ldots, k(n)$, and will be associated with the respective β 's by forming arguments $\beta(i) + |k(i)|$ in the V's [cf. (3.1)]. Clearly, the summation with respect to $k(i), \ldots, k(n)$ does not affect the factorization of the various terms of the moments, as discussed in Sections 5 and 6.

The numerical coefficient of any these terms being $N^{-n/2}(2\nu+1)^{-n/2}$, it can be apportioned among its factors by providing a factor of degree $2m$ in the h's with a coefficient $N^{-m/2}(2\nu+1)^{-m/2}$. If $\beta(i)+|k(i)|$ appears, as an argument, in one of the V's, and $\beta(i)$ in another, $k(i)$ will be said to form a *link* between these two V's. Since the factors are assumed to be irreducible, given a factor composed of a number, say δ, of V's, it is always possible to choose $\delta-1$ k's so that, the V's being suitably ordered, each successive V should be connected with a preceding V by means of one of these links.

Any sequence of $2m$ integers being given, it is proposed to find an upper bound for the number of times the product of h's with these index values can repeat itself in the factor under consideration. The value of any of the arguments of the first V determines those of all the other arguments of this particular V; if, moreover, the value of a link with another V is given, its arguments are also determined, and so on. It follows that no sequence of index values of the h's appears more than $N(2\nu+1)^{\delta-1}$ times in the factor in question, which, consequently, does not exceed

$$N^{1-\frac{m}{2}}(2\nu+1)^{\delta-\frac{m}{2}-1}(\sum_{k=0}^{\infty}|h_k|)^{2m}=(2\nu+1)^{\delta-m}\left(\frac{2\nu+1}{N}\right)^{\frac{m}{2}-1}(\sum_{k=0}^{\infty}|h_k|)^{2m} \tag{14.6}$$

Since, evidently, $\delta \leq m$, in view of (14.3), this shows that the factor is bounded in any case and tends to 0 if $m>2$; consequently, each remainder term, shown to contain at least one factor with $m>2$, necessarily tends to 0 when $N \to \infty$. Hence the proof is complete.

Pursuing a line of argument similar to that adopted in Section 10, we obtain the following:

Corollary 14.2. Under the assumptions H_4^*, if (14. 3) holds, given any set $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies, the joint probability distribution of the variables (14.5) tends to the normal multivariate distribution specified by (14.4).

Remark 14.3. The preceding arguments can be applied to any estimator of the type of (14.1) having a variance of the order of m/N, where m is the number of coefficients $\lambda_{k,N}$ which differ from 0. Thus it can be concluded without further deliberation that the "smoothed periodogram" proposed by *Bartlett* [20] and the estimator suggested by *Tukey* [27] are each asymptotically normally distributed under the assumptions H_4^*, provided that the parameters satisfy the necessary and sufficient conditions of consistency [14]. The covariances of these

estimators can be obtained from a general formula given by Parzen [25]. However, in the discrete-parameter case — the only one with which we are concerned here — this formula should be corrected in the same way as the expression given by *Grenander* and *Rosenblatt* for the variance of the truncated periodogram (see above). The same correction applies to the treatment of all the other estimators of the spectral density by the two last-mentioned authors [6, 24].

Remark 14.4. The second condition (14.3) is essential for the asymptotic normality of the truncated periodogram. Indeed, following a neat heuristic argument devised by *Bartlett* [21] it can be proved that, under the assumption $H_4{}^*$, if, moreover, the process $\{\varepsilon_t\}$ is Gaussian, the periodogram has, in the limit, a χ^2 distribution with two degrees of freedom when it is divided by half its expectation and is taken at any frequency different from 0 and from $\frac{1}{2}$. At the exceptional frequencies the periodogram is equal to the square of $x_1 + \ldots + x_N$ and $x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^N x_N$ respectively. Concequently, as pointed out in a private conversation by *G. M. Jenkins*, at these frequencies the periodogram divided by its expectation has a χ^2 distribution with *one* degree of freedom. This, incidentally, shows that the expression obtained by *Grenander* [6] for the variance of the periodogram admits the same kind of exception at the ends of the frequency range as at zero frequency; his initial mistake is similar to that which affects the treatment of various estimators of the spectral density function in the subsequent papers discussed above.

Remark 14.5. It is now perfectly easy to extend the preceding result first to any process satisfying H_∞^*, and then, by the device introduced in Section 8, to any process satisfying $H_4{}^*$. Indeed, under H_∞^*, the argument used in the proof of Proposition 14.1 still shows that, in an arbitrary term of the exact expression for a moment of the periodogram, any factor of degree $2m$ in the h's and formed by δ V's is bounded by (14.6) and, therefore, tends to O unless $\delta = m$. But if $\delta = m$, all the V's are necessarily V_2's and no cumulant other than $\varkappa_2$ is involved; this implies that the limits of the moments, and, consequently, also the limiting distribution (here obviously determined by the moments), are independent of the shape of the distribution of the ε's.

15. Some expressions connected with the reduced spectrum

In various connections (cf. e.g. [22]) it has been thought useful to consider, beside the spectral density and distribution functions, their

reduced versions, which differ from them by having $\{\varrho_k\}$ substituted for $\{R_k\}$ in their expressions (cf. Sections 9 and 10). It is, then, natural to introduce the reduced truncated periodogram,

$$p_N^{(\nu)}(\omega) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) r_{k,N} \cos 2\pi k\omega = \frac{T_N^{(\nu)}(\omega)}{C_{0,N}}$$

as an estimator of the reduced spectral density function

$$f'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k \cos 2\pi k\omega = \frac{F'(\omega)}{R_0};$$

there is no difficulty in showing that, here, the consistency conditions are still given by (14.3).

Proposition 15.1. Under the assumptions H_4^* and (14. 3), if

$$f'_{N,\nu}(\omega) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \varrho_k \cos 2\pi k\omega,$$

given any finite set $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies, the joint probability distribution of the random variables

$$(2\nu+1)^{-1/2} N^{1/2} [p_N^{(\nu)}(\omega_i) - f'_{N,\nu}(\omega_i)] \qquad (i = 1, \ldots, s) \qquad (15.1)$$

tends, when $N \to \infty$, to the normal multivariate distribution specified by: zero means; zero covariances when the frequencies differ in absolute value; and variances equal to $2[f'(\omega_i)]^2$ for $\omega_i = 0$ or $\pm \frac{1}{2}$ and to $[f'(\omega_i)]^2$ for any other frequency [obviously, if $\omega_i = -\omega_i$, the covariance is equal to the variance of (15.1) at any of these two frequencies]. Moreover, under the assumptions H_{8m}^*, the univariate and mixed moments of (15.1) of orders lower than $2m$ tend to the respective moments of this distribution.

Proof. Clearly,

$$(2\nu+1)^{-1/2} N^{1/2} [p_N^{(\nu)}(\omega_i) - f'_{N,\nu}(\omega_i)] =$$

$$= \frac{(2\nu+1)^{-1/2} N^{1/2} \{T_N^{(\nu)}(\omega_i) - E[T_N^{(\nu)}(\omega_i)]\} - (2\nu+1)^{-1/2} N^{1/2} f'_{N,\nu}(\omega_i) \cdot (C_{0,N} - R_0)}{C_{0,N}}.$$

The moments of the first term of the numerator are given in Proposition 14.1, while these of the second term obviously tend to 0 when $N \to \infty$. Owing to the *Hölder* inequality, it follows that, under the assumptions H_∞^*, all the moments of the numerator tend to values corresponding to the normal distribution specified by (14.4), so that the limiting distribution of the numerator is the same as that of (14.5). An easy application of the device introduced in Section 8 extends the validity of

this conclusion to the case when only H_4^* is assumed. On the other hand,

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} C_{\varphi,N} = R_0.$$

Consequently, according to a much-quoted proposition given by *Cramér* (cf. [2], Section 20.6), the distribution of (15.1) tends to the limit specified above.

The proof of the convergence of the moments of (15.1) of order lower than $2m$ to the stated limits is a straightforward application of Proposition 9.3. In comparison with the proof of Proposition 9.4, the difference is due to the fact that now the random variables under consideration are bounded by a quantity which is $O(N^{1/4}\nu^{1/4})$, and, therefore, $o(N)$, instead of $O(N^{1/4})$; hence, in order to prove the boundedness of the $2m$-th moments of (15.1), we need $P(\bar{E}) = O(N^{-2m})$, which requires H_{8m}. The upper bound of the variables being not $O(N)$, but $o(N)$, there would be little difficulty in proving, by an argument *ad hoc*, that under H_{8m} the $2m$-th moments of (15.1) also tend to the corresponding limits.

The same kind of argument applies to the reduced periodogram itself, and to its incomplete integral. In the first case, the bounds of the variables are clearly $O(N)$, and in the second they are $O(N^{1/4})$, since the incomplete integrals both of the reduced periodogram and of the reduced spectral density function are necessarily contained between 0 and 1 as a result of the non-negative character of the integrands. Hence the assumptions required for the validity of the statements about the moments are H_{8m}^* in the first case and H_{4m}^* in the second, and we have:

Proposition 15.2. Under the assumptions H_4^*, when $N \to \infty$, the probability distribution of $2[f'(\omega)]^{-1} p_N^{(N-1)}(\omega)$ tends to a χ^2 distribution with two degrees of freedom provided that $0 < |\omega| < 1/2$, while for $\omega = 0$ and for $\omega = \pm 1/2$, the distribution of $[f'(\omega)]^{-1} p_N^{(N-1)}\omega$ tends to a χ^2 distribution with one degree of freedom. Mereover, under the assumptions H_{8m}^*, the univariate moments of orders lower than $2m$ of these random variables tend to the respective moments of their limiting distributions.

Proposition 15.3. Under the assumptions H_4^*, given any finite set $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies, the joint distribution of the random variables

$$N^{1/4}\left\{\int_0^{\omega_i} p_N^{(N-1)}(\omega)\,d\omega - \int_0^{\omega_i} f'_{N,N-1}(\omega)\,d\omega\right\} \quad (i = 1, \ldots, s) \qquad (15.2)$$

tends, when $N \to \infty$, to the normal multivariate distribution specified by zero means and by a covariance matrix $|| c_{i,j} ||$, where

$$c_{i,j} = \int_0^{\min(\omega_i, \omega_j)} [f'(\omega)]^2 \, d\omega - \{\int_0^{\omega_j} f'(\omega) \, d\omega\} \int_0^{\omega_i} [f'(\omega)]^2 \, d\omega -$$

$$- \{\int_0^{\omega_i} f'(\omega) \, d\omega\} \int_0^{\omega_j} [f'(\omega)]^2 \, d\omega + \{\int_0^{\omega_i} f'(\omega) \, d\omega\} \{\int_0^{\omega_j} f'(\omega) \, d\omega\} \int_0^{1/2} [f'(\omega)]^2 \, d\omega.$$

Moreover, under the assumptions H^*_{4m}, the random variables (15.2) have multivariate and mixed moments of orders lower than $2m$ tending to the respective moments of the aforesaid distribution.

The formula for the covariances can be obtained from (10.5) by noting that

$$\int_0^{\omega_i} p_N^{(N-1)}(\omega) \, d\omega - \int_0^{\omega_i} f'_{N,N-1}(\omega) \, d\omega =$$

$$= \frac{E[\Phi_N(1/2)\{\Phi_N(\omega_i) - E[\Phi_N(\omega_i)]\}] - E[\Phi_N(\omega_i)]\{\Phi_N(1/2) - E[\Phi_N(1/2)]\}}{R_0 \, C_{0,N}},$$

where $\Phi_N(\omega)$, as defined by (10.4), is the incomplete integral of the periodogram. Unlike the similar fractions which have to be considered in the treatment of $p_N^{(\nu)}$ and $p_N^{(N-1)}$, this expression has a numerator, the second part of which is no longer negligible in comparison with the first; the presence of this part accounts for the cancellation of the term in $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ in the asymptotic covariances. In particular, by slightly transforming the relevant elements of the covariance matrix, we find the symmetric formula

$$c_{i,i} = [\int_{\omega_i}^{1/2} f'(\omega) \, d\omega]^2 \int_0^{\omega_i} [f'(\omega)]^2 \, d\omega + [\int_0^{\omega_i} f'(\omega) \, d\omega]^2 \int_{\omega_i}^{1/2} [f'(\omega)]^2 \, d\omega,$$

which corresponds to the asymptotic variance obtained by *Bartlett* [22] for discrete sums approximating the incomplete integral of $p_N^{(N-1)}(\omega)$.

16. The figure of merit of an estimator of the spectral density function: Preliminary remarks

If $Z'_N(\omega)$ is any estimate of the spectral density function $F'(\omega)$, the integral

$$M[Z'_N(\omega)] = \int_{-1/2}^{1/2} [Z'_N(\omega) - F'(\omega)]^2 \, d\omega \tag{16.1}$$

can be regarded as a figure of merit of this estimate (cf. Section 13). If $Z'_N(\omega)$ is of the form of (14.1), clearly

$$M[Z'_N(\omega)] = \sum_{k=1-N}^{N-1} (\lambda_{k,N} C_{k,N} - R_k)^2 + 2 \sum_{k=N}^{\infty} R_k^2,$$

or

$$M[Z'_N(\omega)] = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 (C_{k,N} - R_k)^2 - 2 \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}(1 - \lambda_{k,N}) R_k (C_{k,N} - R_k) + \\ + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \lambda_{k,N})^2 R_k^2 + 2 \sum_{k=N}^{\infty} R_k^2, \tag{16.2}$$

and consequently

$$E\{M[Z'_N(\omega)]\} = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 \operatorname{var} C_{k,N} + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \lambda_{k,N})^2 R_k^2 + 2 \sum_{k=N}^{\infty} R_k^2. \tag{16.3}$$

In the last expression, the first term represents the mean, over the frequencies, of the variance of the estimator, while the sum of the remaining two terms is the mean of the squared bias. Both these parts are equally important, since the problem of optimizing an estimator is essentially one of finding the most advantageous balance between variance and bias. This problem, however, will form the subject of a further paper; now we are aiming at finding the asymptotic distribution of $M[Z'_N(\omega)]$ about its expectation, at least for some types of estimator.

According to (16.2),

$$M[Z'_N(\omega)] - E\{M[Z'_N(\omega)]\} = [\Delta_N - E(\Delta_N)] - 2\Theta_N,$$

where

$$\Delta_N = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 (C_{k,N} - R_k)^2; \quad E(\Delta_N) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 \operatorname{var} C_{k,N} \tag{16.4}$$

and

$$\Theta_N = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}(1 - \lambda_{k,N}) R_k (C_{k,N} - R_k). \tag{16.5}$$

The relative importance of these two terms varies with the type of estimator, Θ_N being non-negligible when the estimator admits comparatively large values of $\lambda_{k,N}(1 - \lambda_{k,N}) R_k$. For instance, in the case of the "smoothed periodogram" with an optimum number of terms (cf. e.g. [14]), it is easily seen that var Θ_N and var Δ_N are of the same order of magnitude, namely $O(N^{-8/9})$. Since, however, even with an optimum choice of parameter values, estimators of this type are bound to combine a large bias with a large variance, their detailed study is of doubtful interest; in what follows, we shall concentrate on the truncated periodogram, which was shown to be capable of becoming near-optimum.

Lemma 16.1. Under the assumptions $H_{2Q}(Q \geq 2)$ if $Z'_N(\omega) = T_N^{(\nu)}(\omega)$, ν satisfying the first, but not necessarily the second, condition (14.3),

$$\lim_{N \to \infty} E[N(2\nu+1)^{-1/2}\, \Theta_N]^n = 0 \qquad (n = 1, \ldots, Q),$$

and in particular

$$\text{l.i.m.}_{N \to \infty} N(2\nu+1)^{-1/2}\, \Theta_N = 0.$$

Proof. As shown in Theorem 6.2, if $n \leq Q$, there exists a number B_n such that for any set of integers $k(1), \ldots, k(n)$,

$$\left| E\left\{\prod_{i=1}^{n}[N - |k(i)|]^{1/2}\, [C_{k(i),N} - R_{k(i)}]\right\}\right| \leq B_n.$$

Consequently, noting that now $1 - \lambda_{k,N} = \dfrac{\nu}{N} \cdot \dfrac{|k|}{\nu}$, we find

$$\left| E[N(2\nu+1)^{-1/2}\, \Theta_N]^n \right| \leq \frac{N^{n/2}}{(2\nu+1)^{n/2}} \left(\frac{\nu}{N}\right)^n B_n \left\{ \sum_{k=-\nu}^{\nu} \frac{|k R_k|}{\nu} \right\}^n.$$

But the coefficient in front of the term in curly brackets is bounded, while the sum inside is the difference between an ordinary partial sum of $\Sigma |R_k|$ and the corresponding partial *Cesàro* sum, and, therefore, tends to 0 when $N \to \infty$. Thus the proof is complete.

On the other hand, it will be seen that the asymptotic distribution of $N(2\nu+1)^{-1/2}\, \Delta_N$ with $Z'_N(\omega) = T_N^{(\nu)}(\omega)$ is normal with a finite positive variance, so that, as a consequence of the preceding lemma, Θ_N can be neglected in the study of the random variable $M[T_N^{(\nu)}(\omega)]$. Following the established pattern, wo shall first compute the central moments of Δ_N; the first step will consist of determining the cancellations which occur in these moments.

In the following argument, no assumptions whatever are necessary concerning the numbers $\{\lambda_{k,N}\}$, and the sample size can be regarded as a constant. According to (16.4),

$$E[\Delta_N - E(\Delta_N)]^n = \sum_{k(1), \ldots, k(n)=1-N}^{N-1} E\left\{\prod_{i=1}^{n} \lambda^2_{k(i),N}[(C_{k(i),N} - R_{k(i)})^2 - \operatorname{var} C_{k(i),N}]\right\} = \tag{16.6}$$

$$= \sum_{k(1),\ldots,k(n)=1-N}^{N-1} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} \left[\prod_{i=n-s+1}^{n} \lambda^2_{k(i),N} \operatorname{var} C_{k(i),N}\right] E\left[\prod_{i=1}^{n-s} \lambda^2_{k(i),N}(C_{k(i),N} - R_{k(i)})^2\right],$$

where, in the last line, the first term in square brackets and the expectation ought to be replaced by 1 when $s = 0$ and when $s = n$ respectively. For any fixed set of values of $k(1), \ldots, k(n)$, Formula (5.7), as

re-interpreted in Section 6, can be applied to the last expectation. Now, however, the sum is taken with respect to $k(1), \ldots, k(n)$ as well, and to each of these variables there correspond two summation variables of (5.7), henceforth denoted by $\alpha(i)$ and $\beta(i)$ with the appropriate value of i $(i = 1, \ldots, n - s)$. As in Section 5, in a formula which needs not be written explicitly and represents the value of

$$E[\prod_{i=1}^{n-s} \lambda^2_{k(i),\,N}(C_{k(i),\,N} - R_{k(i)})^2], \tag{16.7}$$

the symbols of summation with respect to y and z can be put first. Then each term under this double sum is itself a multiple sum in $k(1), \ldots, k(n-s), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-s), \beta(1), \ldots, \beta(n-s)$, which, in general, can be factorized. Since, for each value of i the arguments $\alpha(i), \alpha(i) + |k(i)|, \beta(i), \beta(i) + |k(i)|$ must appear in V's belonging to the same factor, the degre of each factor in the h's is necessarily a multiple of 4; however, it will be seen that all the quartic factors cancel out when the sum is taken with respect to s.

The nature of a factor depends both on the partition and on the class $\mathfrak{A}^z_{4(n-s),\,y}$ of permutations of the indices of the h's but, when the summation variables appearing in the factor are determined, its precise shape has no bearing on the other factors of the product. Thus all the factors corresponding to a given set of summation variables can be grouped together to form one factor. This applies, in particular, to quartic factors, and it is easy to see that any quartic factor takes the shape of

$$\sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda^2_{k,\,N} \operatorname{var} C_{k,\,N}. \tag{16.8}$$

Given any integers q and s such that $n \geq q \geq s \geq 0$, consider all the terms corresponding to the given value of s and in which the expression for (16.7) contains exactly $q - s$ factors equal to (16.8). The remaining (in general not irreducible) factor is equal, in each case, to an expression which will be denoted by φ_{n-q}, and differs from

$$\sum_{k(1),\,\ldots,\,k(n-q)=1-N}^{N-1} E\{\prod_{i=1}^{n-q}[\lambda^2_{k(i),\,N}(C_{k(i),\,N} - R_{k(i)})^2]\}$$

only in having the terms with quartic factors removed. The number of terms of (16.6) of the type under consideration is, clearly, equal to the number of ways in which $q - s$ variables $k(i)$ can be chosen out a set of $n - s$, i.e. to $\binom{n-s}{q-s}$. Excluding the numerical coefficient $(-1)^s \binom{n}{s}$, each of these terms, irrespective of the value of s, is equal to

$$[\sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 \text{ var } C_{k,N}]^q \varphi_{n-q}. \tag{16.9}$$

Collecting all the terms corresponding to a given q and to $s = 0, \ldots, q$, and counting them with their numerical coefficients, as well as with their respective numbers of repetitions, we obtain (16.9) multiplied by

$$\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{n}{q} \binom{n-s}{q-s},$$

which is identically equal to 0 according to Lemma 2.3. Thus, in (16.6), all the terms corresponding to positive values of s cancel out exactly with all those terms corresponding to $s = 0$ which admit factors of degree 4 in the h's when the sum with respect to $\alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n), k(1), \ldots, k(n)$ is factorized.

17. Asymptotically vanishing terms in the moments of $\Delta_{N,\nu}$

At this stage it will be convenient to assume that $\lambda_{k,N}$ are given by (14.2) although the reasoning would still be valid if these coefficients were only assumed to vanish when $| k | > \nu$, and to remain collectively bounded when divided by $1 - N^{-1} | k |$. In the main part of the crucial argument below, only the first condition (14.3) will be postulated. In order to make the notations more precise, we shall now write $\Delta_{N,\nu}$ instead of Δ_N. The exact expression for any moment of $\Delta_{N,\nu}$ was described in the preceding section; it is a sum of a fixed number of terms, each of which is a multiple sum in $k(1), \ldots, k(n), \alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n)$, and in general can be factorized in some way. Clearly, we need to take into account the normalizing coefficient, which did not matter so long as we were concerned with exact cancellations only, and which is $N^n(2\nu + 1)^{-n/2}$ when n is the order of the moment under consideration. But in the sum representing $\Delta_{N,\nu}$, $C_{k,N}^2$ is multiplied by $(1 - N^{-1} | k |)^2$ and contains the numerical factor $(N - |k|)^{-2}$; since $(1 - N^{-1}|k|)^2 (N - |k|)^{-2} = N^{-2}$, these factors transform the coefficient $N^n(2\nu + 1)^{-n/2}$ into $N^{-n}(2\nu + 1)^{-n/2}$. In each of the terms in question, this overall coefficient can be apportioned among the factors, so that a factor of degree $4m$ in the h's should be multiplied by $N^{-m}(2\nu + 1)^{-m/2}$. It will be seen that with such a coefficient every factor remains bounded, so that if any of them tends to 0, the whole term containing it vanishes in the limit.

Since this is not likely to lead to misunderstandings, the term "factor" will be applied both to the factors of the multiple sums in $k(1), \ldots, k(n), \alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n)$, and to the corresponding

factors of the summands. We shall describe as *sub-factors* those factors of the summand which correspond to factors of the multiple sum when the summation is applied to $\alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n)$, but not to $k(1), \ldots, k(n)$. In what follows, factors and sub-factors will be always understood to be irreducible. Obviously, every factor is composed of one, ore more, sub-factors; in the former case, the sub-factor concerned will be called *improper*. While, as remarked in the preceding section, the degree of a factor is necessarily a multiple of 4, that of a sub-factor only needs to be even. Terms containing quadratic sub-factors were shown in Sections 5 and 6 to cancel out, and the cancellation of terms with quartic factors was demonstrated in the preceding section. Thus, in the remaining terms, sub-factors are of degree at least 4, and factors of degree at least 8. However, it will be shown *inter alia* that factors of degree higher than 8 vanish in the limit.

Any factor of degree $4m$ is an infinite sum of products of $4m$ h's, in which some sequences of indices appear more than once; if p is an upper bound of the numbers of such repetitions, in view of the convergence of $\Sigma \mid h_k \mid$, the factor is $O[p N^{-m}(2\nu + 1)^{-m/2}]$. Hence the importance of finding suitable values of p, which is the goal of the argument below. As in Section 14, the variable $k(i)$ will be said to form a *link* between two V's (which are then necessarily contained in the same sub-factor) if, $\gamma(i)$ standing either for $\alpha(i)$ or for $\beta(i)$, $\gamma(i)$ appears as an argument in one of these V's, and $\gamma(i) + \mid k(i) \mid$ in the other. Thus a subfactor can be interpreted topologically as a graph in which the V's form the vertices, and the links are the sides. It follows from the definition of a sub-factor that such a graph is necessarily connected; it may even be possible to remove from it, without destroying its connectedness, the sides which correspond to a suitable set of links. Assuming the sub-factors to be given in some order, such a (possibly empty) set of *redundant* links will be chosen in connection with each successive sub-factor, subject to the condition that if the sub-factor contains k's chosen as redundant in connection with any of the preceding sub-factors, then none of the k's which appeared in any of the preceding sub-factors should be designated as redundant.

Assume that we are given the sequence of index values of a product of h's forming a term of the factor under consideration. This, evidently, determines the differences of arguments within any of the corresponding V's. If, mereover, the k's appearing in a sub-factor are given, with the possible exception of these which were found redundant in connection

with it, then the difference of any two arguments of V's within this sub-factor is determined. Owing to the restrictions which were placed on the designation of redundant k's, it follows that their absolute values can be ultimately expressed as linear functions of the absolute values of the non-redundant k's appearing in the same factors. Thus, apart from the signs of the redundant k's, the values of all the summation variables producing a given sequence of index values of the h's are determined if we are given the values of one of the α's and β's in each sub-factor, as well as the values of all the non-redundant k's. Consequently, since each of the k's can take $2\nu+1$ values, and each of the α's and β's at most N values, we can make

$$p = N^{\mu}(2\nu + 1)^{\Lambda}\, 2^{\varrho},$$

where μ is the number of sub-factors, Λ the total number of non-redundant k's in the factor, and ϱ the number of redundant k's; however, the factor 2^{ϱ} can be neglected as being independent of N.

Thus the order of magnitude of a factor of degree $4m$ with its normalizing coefficient is not bigger than that of

$$N^{\mu-m}(2\nu + 1)^{\Lambda-m/2}. \tag{17.1}$$

This number can be factorized according to the decomposition of the factor into sub-factors by associating the number

$$N^{1-r}(2\nu + 1)^{\lambda-r/2}. \tag{17.2}$$

with any sub-factor of degree $4r$ containing λ non-redundant k's if each of these appearing in the sub-factor only once is counted as one-half; it will be seen that (17.2) is always bounded.

Since necessarily $\lambda \leq r$, (17.2) cannot exceed

$$N^{1-r}(2\nu + 1)^{r/2} = N^{1-r/2}[(2\nu+1)/N]^{r/2},$$

which shows that the number associated with a sub-factor of degree higher than 8 tends to 0 in any case, while the number associated with an octic sub-factor is always bounded and tends to 0 if $\nu/N \to 0$. In a sextic sub-factor, $r = 3/2$, and if none of the k's appearing in it was designated as redundant in connection with preceding sub-factors, a redundancy can easily be found now. This is obvious if the factor is made up of one, or two, V's; otherwise, it is a product of three V's, the corresponding graph is a triangle, at least one of the k's involved appears here only once, and this k can be declared redundant. Hence, with $\lambda \leq 1$, (17.2) does not exceed

$$N^{-\frac{1}{4}}(2\nu+1)^{\frac{1}{4}} = N^{-\frac{1}{4}}[(2\nu+1)/N]^{\frac{1}{4}},$$

which tends to 0. Finally, a quartic sub-factor is composed either of one V_4 or of two V_2's connected by two links formed by different k's, since otherwise the sub-factor would form a quartic factor; then again, if neither of the two k's was previously found redundant, either can be designated as such, making $\lambda = \frac{1}{2}$ and (17.2) equal to 1. Thus (17.2) is bounded for every sub-factor, and the only sub-factors for which this quantity does not vanish in the limit are either quartic or octic; however, the number associated with the latter also tends to 0 if $\nu/N \to 0$.

Considering quartic sub-factors, we can exclude any of them which is formed by one V_4, for such a sub-factor could be put first in the factor, and then both k's in it could be designated as redundant, making (17.2) equal to $(2\nu+1)^{-\frac{1}{4}}$. Eventually, we are left only with proper sub-factors each of which is formed by two V_2's. But factors composed of them still tend to 0 unless they are composed of exactly two sub-factors. Indeed, the sub-factors can always be ordered so that while one of the k's, say $k(i)$, appears in the first and last sub-factors, every other k appears in two consecutive ones; but then $k(i)$ can be regarded as the only non-redundant k in the whole factor, so that, with $\Lambda = 1$ and $\mu = m$ [cf. (17.1)], the order of magnitude of the whole factor is that of $(2\nu+1)^{1-m/2}$.

It should be noted that discussion of quartic sub-factors which was carried out above did not depend on ν/N tending to 0 when $N \to \infty$. However, if this condition is not satisfied, octic sub-factors have to be taken into account as well. Clearly, the number (17.2) associated with such a sub-factor tends to 0 if there is any redundancy in the k's involved. This excludes, in the limit, octic sub-factors containing k's designated as redundant in connection with any preceding factor. Among the others, these which contain fewer than three V's require only one link, so that a redundant k can always be found.

There remain to be considered octic sub-factors composed of three, or four, V's; it will be seen that the corresponding factor tends to 0 in the limit unless the sub-factor is improper, so that even if ν/N does not tend to 0 we are left, in the limit, only with octic factors. Indeed, if the sub-factor is composed of four V's, which are necessarily V_2's, the corresponding graph is a quadrilateral; unless the sub-factor is improper, at least two sides are formed by k's appearing in the sub-

factor only once, and any of these can be designated as redundant. If the sub-factor is composed of three V's, only two links are required to make the graph connected; consequently, if the sub-factor is proper, one of the three, of four, k's appearing in it can be regarded as redundant.

In the case of an improper octic sub-factor made up of four V_2's, clearly, neither of the two k's can be redundant. If the factor is composed of three V's, one of the two k's may form links between one of the V's and the remaining two, and then the other k can be recognized as redundant, causing the factor to vanish in the limit. This, however, is not necessarily the case; if, neglecting the k's, the factor can be written as

$$V_2[\alpha(i), \beta(i)]\ V_4[\alpha(i), \beta(i), \alpha(j), \beta(j)]\ V_2[\alpha(j), \beta(j)], \tag{17.3}$$

there is no redundancy of the type proviously contemplated, and it is easy to see that this is the only scheme involving three V's which can produce an asymptotically non-vanishing factor.

18. The moments and the asymptotic distribution of $M[T_N^{(\nu)}(\omega)]$

Further considerations will be facilitated by the following two lemmas:

Lemma 18.1. If the multiple series

$$\sum_{k(1), \ldots, k(n)=-\infty}^{+\infty} a_{k(1), \ldots, k(n)}$$

is absolutely convergent, and if the coefficients $c^{(N)}_{k(1), \ldots, k(n)}$ are collectively bounded and tend, with $N \to \infty$, to limits respectively denoted by $c_{k(1), \ldots, k(n)}$, then

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k(1), \ldots, k(n)=-\infty}^{+\infty} c^{(N)}_{k(1), \ldots, k(n)}\ a_{k(1), \ldots, k(n)} = \sum_{k(1), \ldots, k(n)=-\infty}^{+\infty} c_{k(1), \ldots, k(n)}\ a_{k(1), \ldots, k(n)}$$

Lemma 18.2. The series

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \quad \text{and} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$$

being absolutely convergent, let

$$A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, e^{2\pi i k\omega} \quad \text{and} \quad B(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\, e^{2\pi i k\omega};$$

then, for any two non-negative integers m and n,

$$\int_{-1/2}^{1/2} [A(\omega)]^m [B(\omega)]^n\, d\omega = \sum_{\substack{k(1), \ldots, k(m+n)=-\infty \\ [k(1)+\ldots+k(m+n)=0]}}^{+\infty} A_{k(1)} \cdots A_{k(m)}\, B_{k(m+1)} \cdots B_{k(m+n)}.$$

Proofs. The proof of the first of these propositions is obvious; that of the second follows immediately from the identity

$$\int_{-1/2}^{1/2} [A(\omega)]^m [B(\omega)]^n \, d\omega =$$

$$= \sum_{k(1), \ldots, k(m+n)=-\infty}^{+\infty} A_{k(1)} \cdots A_{k(m)} \cdot B_{k(m+1)} \cdots B_{k(m+n)} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i[k(1)+\ldots+k(m+n)]\omega} \, d\omega.$$

Corollary 18.3. Since (10.1) can be re-written as

$$F'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k \, e^{2\pi i k \omega}, \tag{18.1}$$

by slightly rearranging the multiple sum in Lemma 18.2, and by taking into account the identity $R_{-k} = R_k$, we find, in particular,

$$\mathfrak{S}_4 = \sum_{p, q, s=-\infty}^{+\infty} R_p \, R_{p+s} \, R_q \, R_{q+s}, \tag{18.2}$$

where

$$\mathfrak{S}_n = \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega)^n \, d\omega \qquad (n = 1, 2, \ldots,). \tag{18.3}$$

It was shown, in the proceding two sections, how various terms of the expression for the moments of $N(2\nu+1)^{-1/2}[\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})]$ either cancel out exactly or vanish in the limit. Assuming that $\nu/N \to 0$, we are left with terms in which every factor is a product of two quartic sub-factors either of which is composed of two V_2's. Obviously, it can be assumed that the summation variables involved in the given factor are $k(1)$, $k(2)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\beta(1)$ and $\beta(2)$. If $\gamma(1)$ stands for $\alpha(1)$ or for $\beta(1)$, and $\gamma(2)$ stands independently for $\alpha(2)$ or $\beta(2)$, the arguments of the two V_2's forming any of the two sub-factors can be denoted by $\gamma(1)$, $\gamma(1) + |k(1)|$, $\gamma(2)$, and $\gamma(2) + |k(2)|$. Then, incorporating the cumulants in the summand [cf. (3.1)], and remembering that the sub-factor is necessarily irreducible, we find that it is bound to take one of the following two forms:

(a) $\quad R_{\gamma(1)-\gamma(2)} \, R_{\gamma(1)-\gamma(2)+|k(1)|-|k(2)|}$;

(b) $\quad R_{\gamma(1)-\gamma(2)-|k(2)|} \, R_{\gamma(1)-\gamma(2)+|k(1)|}$.

If, in a given term of the factor, the sequence of the index values of the R's is given, $|k(1)| - |k(2)|$ is determined when a sub-factor of the first type is included, and $|k(1)| + |k(2)|$ is determined when there is a sub-factor of the second type. Consequently, if both types of sub-factor are combined in a factor, the sequence of index values of the

R's determines both $|k(1)|$ and $|k(2)|$. It follows that, then, a given product of four R's taken in a given order repeats itself in the factor at most as many times as a given combination of values of $\alpha(1) - \alpha(2)$ and $\beta(1) - \beta(2)$ or of $\alpha(1) - \beta(2)$ and $\beta(1) - \alpha(2)$ within the range of the summation variables, i.e. certainly not more than N^2 times, which, owing to the presence of the numerical coefficient $N^{-2}(2\nu + 1)^{-1}$, makes the factor $O(\nu^{-1})$. Thus we need to consider only those factors in which both sub-factors are of the same type.

By substituting $\gamma(2) - |k(2)|$ for $\gamma(2)$, which merely shifts the range of $\gamma(2)$, we can re-write (b) as

$$(b') \qquad R_{\gamma(1)-\gamma(2)}\, R_{\gamma(1)-\gamma(2)+|k(1)|+|k(2)|}.$$

Since, under the Σ symbol, $\alpha(i)$ and $\beta(i)$ are interchangeable, the summand of any facter composed of two sub-factors of this type can be represented as

$$R_p\, R_{p+s}\, R_q\, R_{q+s}, \tag{18.4}$$

where

$$\alpha(1) - \alpha(2) = p;\ \beta(1) - \beta(2) = q;\ |k(1)| + |k(2)| = s \tag{18.5}$$

Thus, if $c^{(N)}_{p,q,s}$ is $N^{-2}(2\nu + 1)^{-1}$ times the number of solutions of (18.5) in integers within the combined range of the summation variables $k(1)$, $k(2)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\beta(1)$, $\beta(2)$, the factor, with its numerical coefficient, equals

$$\sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} c^{(N)}_{p,q,s}\, R_p\, R_{p+s}\, R_q\, R_{q+s}. \tag{18.6}$$

But it is easily verified that

$$0 \leq c^{(N)}_{p,q,s} \leq 2\ \max\{0,\ \min\ [(2s + 1)(2\nu + 1)^{-1}, 1]\}$$

so that

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = 0$$

for any p, q, and s. Hence, in view of the collective boundedness of $c^{(N)}_{p,q,s}$ and of the absolute convergence of $\Sigma R_p\, R_{p+s}\, R_q\, R_{q+s}$ (which follows from that of ΣR_k), according to Lemma 18.1, any factor composed of two sub-factors of the type of (b) tends to 0 as $N \to 0$.

In the end, we are left only with factors composed of pairs of sub-factors of the type of (a). Every term of the summand can again be represented by (18.4), where, instead of (18.5),

$$\alpha(1) - \alpha(2) = p;\ \beta(1) - \beta(2) = q;\ |k(1)| - |k(2)| = s; \tag{18.7}$$

and the solutions of this system of equations are subject to the inequalities

$$|k(i)| \leq \nu;\ 1 \leq \alpha(i) \leq N - |k(i)|;\ 1 \leq \beta(i) \leq N - |k(i)|\ (i=1, 2). \quad (18.8)$$

If $c^{(N)}_{p,q,s}$ is the number of these solutions divided by $N^2(2\nu+1)$, so that, again, the factor can be represented by (18.6), clearly

$$0 \leq c^{(N)}_{p,q,s} \leq 2.$$

Hence these coefficients are collectively bounded. Closer bounds for them can be obtained as follows. Regarding p, q, and s as constants, we can always assume $\nu > |s| + \max(|p|, |q|)$, since $\nu \to \infty$. Initially suppose $s \geq 0$. Then (18.7) and (18.8) entail $s-\nu \leq k(2) \leq \nu-s$, and to every value of $k(2)$ there correspond two values of $|k(1)|$, unless $k(2) = s = 0$, in which case $k(1) = 0$ is the only possible value. On the other hand, given $k(1)$ and $k(2)$, each of the first two equations (18.7) admits, independently of the other, between

$$N - |k(2)| - r - s \text{ and } N - |k(2)| - s$$

solutions, where $r = \max(|p|, |q|)$. Thus the total number of solutions of (18.7) is contained between

$$\sum_{k(2)=s+r-\nu}^{\nu-s-r} (N-s-r-|k(2)|)^2 - (N-r)^2 \text{ and } 2\sum_{k(2)=s-\nu}^{\nu-s} (N-s-|k(2)|)^2.$$

It is easy to see that the case of negative values of s is covered by substituting $|s|$ for s. Assuming that ν/N tends to some limit, the limit of $c^{(N)}_{p,q,s}$ can be obtained by evaluating the two sums, dividing them by $N^2(2\nu+1)$, and passing to the limit, which is the same for both; the result is

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = 2 - 2\lim \frac{\nu}{N} + \frac{2}{3}\left[\lim_{N\to\infty} \frac{\nu}{N}\right]^2 \quad (18.9)$$

for any p, q, and s.

Up to this point, the discussion of the types of factor considered in this section did not depend on any assumptions about ν, apart from that of its tending to infinity with N, and, in order to justify (18.9), we only needed the existence of a limit of ν/N. However, we are more particularly concerned with the case when this limit is 0. Then (18.9) becomes

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = 2 \qquad (p, q, s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

and according to Lemma 18.1 and Corollary 18.3, the factor tends to $2\,\mathfrak{S}_4$.

The limits of the moments of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}[\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})]$ are now easily found if we note that the odd moments cannot contain

terms exclusively composed of octic factors, that for even values of n, there are $n!/[2^{n/2}(n/2)!]$ ways of grouping $k(1), \ldots, k(n)$ into $n/2$ pairs, and that, finally, given i and j, there are two ways of forming a factor of the type considered above with the summation variables $k(i)$, $k(j)$, $\alpha(i)$, $\alpha(j)$, $\beta(i)$, $\beta(j)$, since the sub-factors contain respectively either the pairs

$$\{\alpha(i), \alpha(j)\} \text{ and } \{\beta(i), \beta(j)\} \text{ or } \{\alpha(i), \beta(j)\} \text{ and } \{\beta(i), \alpha(j)\}.$$

By using the device introduced in Section 8, conclusions about the limiting probability distribution can be extended to the case when the ε's are not assumed to have moments of orders higher than 8. Thus we have the following:

Proposition 18.4. Under the assumptions H_8^*, if (14.3) holds, the distribution of

$$N(2\nu+1)^{-1/2}\,[\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})] \tag{18.10}$$

tends, when $N \to \infty$, to a normal distribution with zero mean and variance $4\,\mathfrak{S}_4$. Moreover, if the assumptions $H_{4Q}(Q \geq 2)$ are substituted for H_8^*, the moments of this random variable up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Owing to Lemma 16.1, we can, finally, draw the following conclusion:

Proposition 18.5. The preceding proposition holds if (18.10) is replaced by

$$N(2\nu+1)^{-1/2}\,\{M[T_N^{(\nu)}(\omega)] - E[M[T_N^{(\nu)}(\omega)]]\}.$$

There would be no difficulty in extending this result to

$$N(2\nu+1)^{-1/2}\,\{M[Z'_N(\omega)] - E[M[Z'_N(\omega)]]\},$$

with $\lambda_{k,N}$ given by (10.13) and $\nu = [\log_{1/\varrho} N]$. Clearly, the rapidity of convergence, both of distributions and of moments, is conditioned by the rapidity with which $\nu \to \infty$; consequently, either convergence must be expected to be slow.

19. The asymptotic distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}$

In view of several applications which follow, it is now proposed to extend the scope of the investigation of $\Delta_{N,\nu}$ to the case when ν/N tends to a limit different from 0. Obviously, it suffices to deal with the case when $\nu = [\theta N]$, where θ is a positive constant which cannot exceed 1. If, for the sake of convenience, we make $C_{N,N} = 0$ (any other constant would do), $\Delta_{N,N}$ becomes meaningful and equal to $\Delta_{N,N-1}$, so that the most important case of $\nu = N - 1$ corresponds to $\theta = 1$. The nor-

malizing coefficient $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}$ becomes equivalent to $N^{\frac{1}{2}}(2\theta)^{-\frac{1}{2}}$, but it is more convenient to make it now simply $N^{\frac{1}{2}}$.

The discussion carried out in Section 17 still applies, and the only terms, in the moments of

$$N^{\frac{1}{2}}[\Delta_{N,[\theta N]} - E(\Delta_{N,[\theta N]})], \tag{19.1}$$

which do not vanish in the limit are these which factorize into octic factors. All these factors corresponding to a given set of summation variables, say $\{k(1), k(2), \alpha(1), \alpha(2), \beta(1), \beta(2)\}$, can be lumped together into one factor, which, clearly, represents the variance of (19.1). Repeating the argument leading to Proposition 18.4, one can see that asymptotic normality of (19.1) will be proved as soon as it is proved that its variance tends to a finite limit. But the lumped octic factor under consideration is composed of two kinds of expression: Those which can be split into two sub-factors, and those which cannot. The former were discussed in detail in the preceding section. Now (18.9) becomes,

$$\lim_{N\to\infty} C^{(N)}_{p,q,s} = 2 - 2\theta + \frac{2}{3}\theta^2.$$

Considering that two factors of the type under consideration can be formed with a given set of summation variables, and that the normalizing factor of an octic term has been multiplied by 2θ, we obtain now, as a total contribution of this type of factor, the quantity

$$(8\theta - 8\theta^2 + \frac{8}{3}\theta^3)\,\mathfrak{S}_4. \tag{19.2}$$

However, when ν/N no longer tends to 0, we must also take into account the improper octic sub-factors. As shown in Section 17, the only ones which do not vanish in the limit are composed either of four V_2's or of two V_2's and one V_4. In the former case, the sub-factors can be represented as quadrilaterals, each of the two k's forming two sides. Hence this case splits into two: (i) when these two sides are adjacent; and (ii) when they are opposite each other.

In the first case, taking into account the cumulants, but ignoring the precise positions of $|k(1)|$ and $|k(2)|$, and subject to permutations within each of the two pairs $\{\alpha(1), \beta(1)\}$ and $\{\alpha(2), \beta(2)\}$, we are necessarily confronted with the scheme

(i) $\qquad R_{\alpha(1)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}.$

Clearly, the sum of the indices of the R's is bound to be one of the following expressions: $\pm|k(1)|, \pm|k(2)|, \pm|k(1)| \pm |k(2)|, 0$. Except in

the last case, given the sequence of the four index values of the R's, the values of two summation variables determine those of the others, so that, in view of the numerical coefficient N^{-3} belonging to the factor, this factor becomes $O(N^{-1})$.

Both $|k(1)|$ and $|k(2)|$ cancel out in the sum of the indices of the R's if, and only if, each of the k's appears once in the first and once in the second term of a difference forming such an index. Thus (i) yields four types of expression, namely:

(ia) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)+|k(1)|-|k(2)|}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)+|k(2)|-|k(1)|}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$;

(ib) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)+|k(1)|}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)-|k(1)|}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$;

(ic) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$;

(id) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)-|k(2)|}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)+|k(2)|}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$.

The permutations within the pairs $\{\alpha(1), \beta(1)\}$ and $\{\alpha(2), \beta(2)\}$ double the number of terms, Permuting the values 1 and 2 of i in $\alpha(i)$, $\beta(i)$, and $k(i)$ does not increase the number of terms, since it leaves (ia) and (ic) invariant and permutes (ib) with (id). Thus we have to consider two expressions of each of the types of (ia) and (ic), and four of the type of (ib).

Each of the expressions can be represented as

$$R_s\, R_p\, R_{-s-p-q}\, R_q. \tag{19.3}$$

In the cases (ia), (ib), (ic) we have respectively

$$p = \alpha(2) - \beta(2);\ q = \beta(1) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2) + |k(1)| - |k(2)|; \tag{19.4}$$

$$p = \alpha(2) - \beta(2);\ q = \beta(1) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2) + k(1)|; \tag{19.5}$$

$$p = \alpha(2) - \beta(2);\ q = \beta(1) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2); \tag{19.6}$$

and the number of solutions, in integers, of each of these three systems of equations, subject to the inequalities

$$|k(i)| \leq [\theta N];\ 1 \leq \alpha(i) \leq N - |k(i)|;\ 1 \leq \beta(i) \leq N - |k(i)|, \quad (i = 1, 2), \tag{19.7}$$

is the number of repetitions of (19.3) in the corresponding sum. This number, multiplied by the coefficient N^{-3} belonging to octic factors, will be denoted by $c^{(N)}_{p,q,s}$.

In the case of either (19.4) or (19.6), if $k(1)$ and $k(2)$ are given, and $k = \max[|k(1)|, |k(2)|]$, the number of solutions in $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\beta(1)$, $\beta(2)$ is easily seen to be contained between $N - k - |p| - |q| - |s|$ and $N - k$, while the number of sets of values of $k(1)$ and $k(2)$ corresponding to a given non-negative k is max $(8k, 1)$. Hence

$$\lim c^{(N)}_{p,q,s} = 4\,\theta^2 - \frac{8}{3}\,\theta^3. \tag{19.8}$$

Consequently, according to (18.3) and to Lemmas 18.1 and 18.2, with $A_k = B_k = R_k$ in the latter, the joint contribution to the variance of (19.1) of the four terms of the types of (ia) or (ic) tends to

$$(16\,\theta^2 - \frac{32}{3}\,\theta^3)\,\mathfrak{S}_4.$$

As a result of the asymmetry in the third equation (19.5), when $k(1)$ and $k(2)$ are given, the number of solutions of these equations is readily found to be contained between $N - K - |p| - |q| - |s|$ and $\max\{0, N - K + |s|\}$, where $K = |k(1)| + |k(2)|$, and the number of pairs of values of $k(1)$ and $k(2)$ corresponding to a given K is 1 if $K = 0$, $4K$ if $0 < K \leq [\theta N]$, and $4\{2[\theta N] - K + 1\}$ if $[\theta N] < K \leq 2[\theta N]$, so that

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = \begin{cases} 4\,\theta^2(1-\theta) & \text{if } 0 < \theta \leq \tfrac{1}{2}; \\ \tfrac{4}{3}\,\theta^3 - 4\,\theta^2 + 4\,\theta - \tfrac{2}{3} & \text{if } \tfrac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases} \tag{19.9}$$

Therefore, the joint contribution of all the terms corresponding to the scheme (i) amounts to the product of $\mathfrak{S}_4$ by:

$$\left.\begin{array}{ll} 32\,\theta^2 - \frac{80}{3}\,\theta^3 & \text{if } 0 < \theta \leq \frac{1}{2}; \\ -\frac{8}{3} + 16\,\theta - \frac{16}{3}\,\theta^3 & \text{if } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{array}\right\} \tag{19.10}$$

Now we can pass to the case of an improper octic sub-factor represented by a quadrilateral in which the two sides corresponding to the same k are opposite each other. Clearly, the scheme is bound to be

(ii) $V_2[\alpha(1), \alpha(2)]\ V_2[\alpha(2), \beta(1)]\ V_2[\beta(1), \beta(2)]\ V_2[\beta(2), \alpha(1)]$,

and this is invariant with respect to the permutations considered in connection with (i). For the same reasons as before, the k's can take only four combined positions if the factor does not vanish in the limit, and it is easy to verify that the corresponding four expressions are transformed into each other by the group generated by the permutations of $\alpha(1)$ with $\beta(1)$ and of $\alpha(2)$ with $\beta(2)$. Thus we have four terms of the summand which yield the same sum and are exemplified by

$$R_{\alpha(1)-\alpha(2)+|k(1)|}\ R_{\alpha(2)-\beta(1)+|k(2)|-|k(1)|}\ R_{\beta(1)-\beta(2)-|k(2)|}\ R_{\beta(2)-\alpha(1)},$$

which is nothing else but (19.3) with

$$p = \alpha(2) - \beta(1) + |k(2)| - |k(1)|;\ q = \beta(2) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2) + |k(1)|,$$

the ranges of the variables being still defined by (19.7). This system of

equations behaves very much like (19.5), and the number of solutions is found in the same way, so that (19.9) still holds. In consequence, the joint contribution of the four terms under consideration to the limiting variance of (19.1) is again

$$\left.\begin{array}{ll} 16\,(\theta^2 - \theta^3)\,\mathfrak{S}_4 & \text{if } 0 > \theta \leq \tfrac{1}{2}; \\ (-\tfrac{8}{3} + 16\,\theta - 16\,\theta^2 + \tfrac{16}{3}\,\theta^3)\,\mathfrak{S}_4 & \text{if } \tfrac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{array}\right\} \tag{19.11}$$

It remains to consider the improper octic sub-factors composed of three V's and covered by the scheme of (17.3). For reasons similar to those which applied to the case of products of four V_2's in factors which do not vanish in the limit, the k's can take only four sets of combined positions, so that we are left with four terms which, including the cumulants, can be represented as follows:

(iiia) $\varkappa_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\; R_{\beta(1)-\alpha(1)}\; V_4[\alpha(1) - \beta(2) + |\,k(1)\,| - |\,k(2)\,|,$
$\beta(1) - \beta(2) + |\,k(1)\,| - |\,k(2)\,|, \alpha(2) - \beta(2), 0];$

(iiib) $\varkappa_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\; R_{\beta(1)-\alpha(1)}\; V_4[\alpha(1) - \beta(2) + |\,k(1)\,|, \beta(1) - \beta(2) + |\,k(1)\,|,$
$\alpha(2) - \beta(2), 0];$

(iiic) $\varkappa_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\; R_{\beta(1)-\alpha(1)}\; V_4[\alpha(1) - \beta(2), \beta(1) - \beta(2), \alpha(2) - \beta(2), 0];$

(iiid) $k_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\; R_{\beta(\mathrm{i})-\alpha(1)}\; V_4[\alpha(1) - \beta(2) - |\,k(2)\,|, \beta(1) - \beta(2) -$
$- |\,k(2)\,|, \alpha(2) - \beta(2), 0].$

It is easy to see that contribution of (iiid) is the same as that of (iiib), and that each of these expressions is equal to

$$\varkappa_4\, R_p\, R_q\, V_4[p + s, p + q + s, p, 0] \tag{19.12}$$

with p, q, and s given by (19.4), (19.5), and (19.6) for (iiia), (iiib), and (iiic) respectively. Thus the number of repetitions of (19.12) in each of the sums in question is the same as that of (19.3) in the corresponding sums of (ia), (ib), and (ic), and since the numbers of sums are now halved, we find, in the limit, the sum of (19.12) for all values of p, q, and s, multiplied by one-half of (19.10). But the sum of (19.12) is easily found to be $\varkappa_4\, \varkappa_2^{-2}\, \mathfrak{S}_2^2$. Thus the total contribution of the terms of the type of (iii) is

$$\left.\begin{array}{ll} (16\,\theta^2 - \tfrac{40}{3}\,\theta^3)\,\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2 & \text{if } 0 < \theta \leq \tfrac{1}{2}; \\ (-\tfrac{4}{3} + 8\,\theta - \tfrac{8}{3}\,\theta^3)\,\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2 & \text{if } \tfrac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{array}\right\} \tag{19.13}$$

Adding together the contributions (19.2), (19.10), (19.11) and (19.13), we find

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} \Delta_{N,[\theta N]} = \begin{cases} (8\theta+40\theta^2-40\theta^3)\,\mathfrak{S}_4+(16\theta^2-\frac{40}{3}\theta^3)\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2 \\ \qquad\qquad \text{if } 0<\theta\leq \tfrac{1}{2}; \\ (-\tfrac{16}{3}+40\theta-24\theta^2+\tfrac{8}{3}\theta^3)\,\mathfrak{S}_4+ \\ \quad +(-\tfrac{4}{3}+8\theta-\tfrac{8}{3}\theta^3)\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2 \text{ if } \tfrac{1}{2}\leq\theta\leq 1; \end{cases} \tag{19.14}$$

and in particular

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} \Delta_{N,N-1} = \frac{40}{3}\,\mathfrak{S}_4 + 4\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2. \tag{19.15}$$

In view of the remarks made at the beginning of the present section, this leads to the following conclusion:

Proposition 19.1. Under the assumptions H_8^*, if $0<\theta\leq 1$, the distribution of (19.1) tends, when $N\to\infty$, to a normal distribution with a zero mean and with a variance given by (19.14) or, for $\theta=1$, by (19.15). Moreover, under the assumptions $H_{4Q}(Q\geq 1)$, the moments of (19.1) up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Remark 19.2. It is easy to verify that

$$\lim_{N\to\infty} E(\Delta_{N,[\theta N]}) = (2\theta-\theta^2)\,\mathfrak{S}_2, \tag{19.16}$$

and, in particular,

$$\lim_{N\to\infty} E(\Delta_{N,N-1}) = \mathfrak{S}_2. \tag{19.17}$$

But $\Delta_{N,N-1}$ is the mean, over the frequencies, of the squared difference between the periodogram $I_N(\omega)$ and its expectation. Since, under our assumptions, $E[I_N(\omega)]\to F'(\omega)$ uniformly in ω, it follows that the mean, over the frequencies, of the squared difference between the periodogram and the "true" spectral density function tends in the mean to the constant $\mathfrak{S}_2$. Thus, in particular, we arrive at the not altogether unexpected conclusion that, as the sample size increases, the periodogram becomes less and less likely to yield, even by accident, a reasonably good estimate of the spectral density function.

20. An estimator of $\mathfrak{S}_2$ proposed by Grenander and Rosenblatt

In what follows, a numerical sequence whose general term is, say, $B_k(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ will be denoted by the same letter without the lower index, i.e. in this case by B. The following proposition, also

useful in some other contexts, and for this reason expressed in its whole generality, will play an important part in the discussion of various estimators of $\mathfrak{S}_2$:

Proposition 20.1. Make, generally,

$$\Psi_{N,\nu}(B) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 B_k(C_{k,N} - R_k), \tag{20.1}$$

and assume that, for $u = 1, \ldots, m$, the sequence $A^{(u)}$ satisfies $A^{(u)}_{-k} = A^{(u)}_k$, the corresponding series being absolutely convergent. Let ν be an arbitrary function of N subject only to the condition that it should take integral values smaller than, or equal to, N, and that it should tend to infinity with N. Then, under the assumptions H_4*, the joint probability distribution of the random variables

$$N^{1/2} \Psi_{N,\nu}(A^{(u)}) \qquad (u = 1, \ldots, m) \tag{20.2}$$

tends, for $N \to \infty$, to a normal multivariate distribution with zero means and with covariances determined by

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov} [\Psi_{N,\nu}(A^{(u)}), \Psi_{N,\nu}(A^{(v)})] =$$

$$= \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_k R_k] [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A^{(v)}_k R_k] + 2 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_p R_{p+s} A^{(v)}_q R_{q+s}. \tag{20.3}$$

Moerover, under the assumptions $H_{2Q}(Q \geq 2)$ substituted for H_4*, when $N \to \infty$, the moments of (20.2) up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Proof. Clearly, $E[\Psi_{N,\nu}(A^{(u)})] = 0$, and

$$N \operatorname{cov} [\Psi_{N,\nu}(A^{(u)}), \Psi_{N,\nu}(A^{(v)})] =$$

$$= \sum_{k,l=-\nu}^{\nu} A^{(u)}_k A^{(v)}_l (1 - \frac{|k|}{N})^2 (1 - \frac{|l|}{N})^2 N \operatorname{cov} (C_{k,N}, C_{l,N}).$$

Since the coefficients of $A^{(u)}_k A^{(v)}_l$ are collectively bounded and since

$$\lim_{N\to\infty} (1 - \frac{|k|}{N})^2 (1 - \frac{|l|}{N})^2 N \operatorname{cov} (C_{k,N}, C_{l,N}) =$$

$$\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_k R_l + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q R_{q+k-l} + R_{q+k} R_{q-l})$$

(cf. Sections 5 and 6), we find, according to Lemma 18.1

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov} [\Psi_{N,\nu}(A^{(u)}), \Psi_{N,\nu}(A^{(v)})] =$$

$$= \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_k A^{(v)}_l [\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_k R_l + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q R_{q+k-l} + R_{q+k} R_{q-l})],$$

which is equivalent to (20.3), since

$$\sum_{k,l,q=-\infty}^{+\infty} A_k^{(u)} A_l^{(v)} R_q R_{q+k-l} = \sum_{k,l,q=-\infty}^{+\infty} A_k^{(u)} A_l^{(v)} R_{q+k} R_{q-l} = \sum_{k,l,q=-\infty}^{+\infty} A_k^{(u)} A_l^{(v)} R_{k+q} R_{l+q}.$$

Higher univariate and mixed moments of (20.2) can be computed in the same way, and since the asymptotic values of the moments of the sample covariances are those of a normal multivariate distribution, the resulting limits of the various moments of (20.2) are necessarily those of another normal multivariate distribution. Hence the normality of the corresponding distribution itself; this conclusion is extended, by means of the device introduced in Section 8, to the case when only H_4^* is assumed.

By making $m = 1$, $A^{(1)} = R$, we obtain the following:

Corollary 20.2. Under the assumptions H_4^*, ν tending to infinity with N, the distribution of $N^{1/2} \Psi_{N,\nu}(R)$ tends to a normal distribution with a zero mean and with a variance equal to

$$\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \mathfrak{S}_2^2 + 2\,\mathfrak{S}_4;$$

under the assumptions $H_{2Q}(Q \geq 1)$, the moments of $N^{1/2} \Psi_{N,\nu}(R)$ up to the order Q tend, when $N \to \infty$, to the corresponding moments of this distribution.

Grenander and *Rosenblatt* [7, 24] proposed, as an estimator of $\mathfrak{S}_2$, the statistic

$$G_{N,\nu} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 C_{k,N}^2, \tag{20.4}$$

with

$$\nu = [K N^{\alpha}], \tag{20.5}$$

where K and α were positive constants, of which α had to be smaller than 1. Assuming H_8^* and $h_k = 0(k^{\beta})$ with $\beta < -1$, they proved

$$\operatorname*{plim}_{N \to \infty} G_{N,\nu} = \mathfrak{S}_2.$$

However, on the basis of the preceding results, there is no difficulty in obtaining the precise assymptotic distribution of $G_{N,\nu}$; at the same time, (20.5) can be replaced by the more general condition (14.3), and the additional assumption concerning the h's can be dropped altogether.

Obviously,

$$G_{N,\nu} - E(G_{N,\nu}) = \Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu}) + 2\,\Psi_{N,\nu}(R);$$

according to Proposition 18.4 and Corollary 20.2, $\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})$ is

asymptotically negligible in comparison with $2\,\Psi_{N,\nu}(R)$, and this leads to:

Proposition 20.3. Under the assumptions $H_8{}^*$ and (14.3), the distribution of $N^{1/2}[G_{N,\nu} - E(G_{N,\nu})]$ tends, when $N \to \infty$, to a normal distribution with zero mean and variance $8\,\mathfrak{S}_4 + 4\,\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2{}^2$, the moments up to the order Q behaving accordingly if H_{8Q} holds.

Unfortunately, the bias of $G_{N,\nu}$ is much less satisfactory than its scatter. We have

$$E(G_{N,\nu}) - \mathfrak{S}_2 =$$

$$= \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \operatorname{var} C_{k,N} - \sum_{k=-\nu}^{\nu} [1 - (1 - \frac{|k|}{N})^2]\, R_k^2 - 2 \sum_{k=\nu+1}^{\infty} R_k^2. \qquad (20.6)$$

Of these three terms, the middle one is the least alarming. It is easily seen to be smaller, in absolute value, than

$$\frac{4}{N} \sum_{k=1}^{\nu} k\, R_k^2;$$

thus, if $\Sigma\,|\,k\,|\,R_k{}^2$ converges, which is a mild additional assumption, this term is $O(N^{-1})$, and, therefore, asymptotically negligible in comparison with the standard deviation of $G_{N,\nu}$.

The first term of the bias is easily seen to be $O(\nu/N)$. If (20.5) holds, this becomes $O(N^{\alpha-1})$, which is negligible in comparison with the standard deviation of the estimator only if $\alpha < \frac{1}{2}$, although it should be remembered that if $\mathfrak{S}_2$ is estimated on the basis of several independent samples of the same process, the relative importance of the bias increases accordingly.

The third term of (20.6) can be the most important of the three. If R_k is of the order of $k^{-(1+\delta)}$, the term in question is of the order of $\nu^{-(1+2\delta)}$, i.e. of $N^{-\alpha(1+2\delta)}$ if (20.5) holds. Therefore, if α is to be chosen independently of the process to which $G_{N,\nu}$ is applied, and so as to make the third bias term negligible in comparison with $[\operatorname{var} G_{N,\nu}]^{1/2}$ whenever there exists a positive δ for which $R_k = O(k^{-(1+\delta)})$, we must make $\alpha \geq \frac{1}{2}$. This is incompatible with the requirement arising out of the consideration of the first bias term. It might be argued that cases where $\Sigma\,R_k$ converges extremely slowly are of little importance in practice, and that assuming a positive lower bound for δ would make it possible to chose α so as to make all the three bias terms relatively negligible. However, there are further difficulties.

Even if α is determined once and for all, $[K N^{\alpha}]$ is still any integer so long as K has not been specified. If the value of K were to be chosen on the basis a preliminary inspection of the sample available, this would thoroughly change the character of the estimator by introducing another level of estimation, even if no formalized procedure were adopted. We should, therefore, assume that the value of K is specified in advance, without paying any attention to the sample to be analyzed. Asymptotically, the result would be satisfactory irrespective of the choice of value for K, subject to the limitations pointed out above. Nevertheless, it should be borne in mind that asymptotic properties of estimators are useful only insomuch as they can be regarded as approximately applying to samples of reasonable size, i.e. such as can be profitably treated by methods of Mathematical Statistics. But the desirable asymptotic properties deduced above for $G_{N,\nu}$ do not fulfil this requirement. The bias may exceed the standard deviation, and indeed its ratio to the "true" value of $\mathfrak{S}_2$ can be arbitrarily near to -1, however "reasonable" the sample size may be.

This can best be seen as follows: Consider a continous-parameter process sampled at regular intervals, and suppose that this operation yields linear processes; according to *Doob* [23], this is bound to happen, at least approximately, if the original process is Gaussian, so that, then, the presently developed theory can be applied. Now assume that, instead of one sampling, we have an infinite sequence of them, corresponding to a sequence of sampling interval lengths tending to 0. An infinity of discrete-parameter processes is thus generated, and the samples which correspond to a fixed sample of the continuous-parameter process ought to be regarded as approximately equally "reasonable". But if the continuous parameter is regarded as measuring time, then the lengths of time corresponding to $\nu = [K N^{\alpha}]$ with the same K and α shrink to 0 with the sampling interval, so that

$$-2 \sum_{k=\nu+1}^{\infty} R_k^2 / \mathfrak{S}_2 \to -1.$$

The only way of meeting this objection is to have ν/N tending to a positive limit, by making $\nu = [\theta N]$ with $0 < \theta \leq 1$. Theoretically, the most satisfactory solution is to make $\theta = 1$, but since the computations are substantially reduced by taking a smaller value of θ, the general case will be treated. It may be reasonable to say that unless the covariances become collectively negligible for lags exceeding, for

instance, one-tenth of the sample size, no statistical analysis is worthwhile; then we can decide a priori to make $\theta = {}^1/_{10}$. Of course, now the first term of (20.6) has to be taken into account; it is nothing else but $E(\Delta_{N,[\theta N]})$, which is asymptotically given by (19.16). Thus

$$\lim_{N\to\infty} E(G_{N,[\theta N]}) = (1 + 2\theta - \theta^2)\,\mathfrak{S}_2,$$

the difference between $E(\Delta_{N,[\theta N]})$ and its limit being easily seen to be $O(N^{-1})$ whenever $\Sigma\,|k|\,R_k$ converges, and being, in any case, asymptotically insensitive to a shortening of the sampling intervals.

It is, therefore, proposed to take

$$S_{N,[\theta N]} = (1 + 2\theta - \theta^2)^{-1} \sum_{k=-[\theta N]}^{[\theta N]} (1 - \frac{|k|}{N})^2\, C_{k,N}^2 \tag{20.7}$$

with any positive θ not exceeding 1, or, more particularly,

$$S_{N,N-1} = {}^1/_2 \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2\, C_{k,N}^2, \tag{20.8}$$

as an estimator of $\mathfrak{S}_2$. According to what has been said, the bias of this estimator can be regarded as comparatively negligible. On the other hand,

$$S_{N,[\theta N]} - E(S_{N,[\theta N]}) =$$
$$= (1 + 2\theta - \theta^2)^{-1}\,[\Delta_{N,[\theta N]} - E(\Delta_{N,[\theta N]}) + 2\,\Psi_{N,[\theta N]}(R)]. \tag{20.9}$$

Both parts of the expression in square brackets were investigated above; however, in order to obtain the asymptotic distribution of their sum, we shall have to determine the asymptotic joint distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}$ and $\Psi_{N,[\theta N]}(R)$.

21. The asymptotic joint distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(1)}), \ldots, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(m)})$

Proposition 21.1. Under the assumptions of Proposition 20.1, with H_8^* substituted for H_4^*, θ satisfying $0 < \theta \leq 1$, the joint distribution of (19.1) and (20.2) tends, when $N \to \infty$, to a normal multivariate distribution with zero means and with covariances given by (19.14), (20.3), and

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}\,[\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(u)})] =$$
$$= (2\theta - \theta^2)\,[4 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\, R_p\, R_q\, R_{-p-q-s} + 2\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\, R_s]. \tag{21.1}$$

Moreover, when the assumptions $H_{4Q}(Q \geq 2)$ are substituted for $H_8{}^*$, the univariate and mixed moments of (19.1) and (20.2) up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Proof. The distribution under consideration will be deduced from its moments; the univariate moments of (19.1), as well as all the moments of (20.2), were obtained in the preceding two sections, so that we only need to find those moments which involve both (19.1) and at least one of the variables (20.2). Following the same procedure as in Section 19, and using formulae established in Sections 5 and 6, we can express the moments under consideration as sums of terms each of which is a multiple sum of products of V's with the appropriate cumulants and numerical coefficients, now also multiplied by the corresponding products of A's. The summation variables, clearly, include a number of k's equal to the overall order of the moment. Those k's which appear as indices of the A's will be described, in this section, as being *of the first kind*, and all the others, whose presence is due to $\Delta_{N,[\theta N]}$, as being *of the second kind*. If $k(i)$ is of the second kind, it is associated with two other summation variables in the same way as all the k's were in Section 19; these further summation variables, now also described as being of the second kind, will be denoted by $\alpha(i)$ and $\beta(i)$. If $k(i)$ is of the first kind, it is obviously associated, in a similar way, with only one other summation variable, which will be denoted by $\alpha(i)$ and described as being of the first kind. In order to simplify the language, it is proposed to describe the h's themselves as being of the first, or second, kind in accordance with the kind of summation variables which form their indices.

In general, the various terms composing any of the moments under consideration can be factorized, and in each of the factors some of the k's can be regarded as redundant. Each term of such a multiple sum is a product of h's, and now also of A's; since the knowledge of the sequence of index values of the A's and h's includes the knowledge of the values of the k's of the first kind, these can be regarded as redundant by an obvious extention of the definition of redundancy given in Section 17.

Let $n(1)$ be the order of the moment in the Ψ's, and $n(2)$ that in $\Delta_{N,[\theta N]}$; every term contains, then, $2\,n(1)$ h's of the first kind and $4\,n(2)$ of the second, while the normalizing coefficient is $N^{\frac{1}{4}[n(1)+n(2)]}$. On the other hand, if we include the corresponding coefficients $1 - N^{-1}\,|k|$ in the C's, the denominators of the sample covariances

contribute $N^{-n(1)-2n(2)}$. A similar coefficient remains attached to each A, but it can be omitted as having no bearing on the limit of the whole sum. Thus the numerical coefficient in front of each term of the moment is $N^{-\frac{1}{2}n(1)-\frac{1}{2}n(2)}$. As previously done on similar occasions, this coefficient can be apportioned among the sub-factors. If, changing the notations, we now assume that the sub-factor, and not the term, is of degree $2\,n(1)$ in the h's of the first kind, and $4\,n(2)$ in those of the second kind, so that $n(2)$ is no longer necessarily an integer, but is bound to be a multiple of $\frac{1}{2}$, the corresponding coefficient has still the same form, and the order of magnitude associated with the sub-factor is equal to this coefficient multiplied by a power of N with an exponent exceeding 1 by the number of non-redundant k's in the sub-factor, those which appear only once being counted as halves (cf. Section 17). For sub-factors containing h's of one kind only, this coefficient is always bounded, since these are the sub-factors which arise in the previously computed moments; they were examined in detail in the case of $\Delta_{N,\nu}$ in Section 17, while in the case of Ψ's sub-factors coincide with factors and indeed differ from those considered in Section 5 and 6 only by the accretion of the corresponding A's and the summation with respect to the k's which, here, does not influence the respective orders of magnitude. If $n(1) = 1$ and $n(2) = \frac{1}{2}$, it is esay to verify that the k of the second kind is necessarily redundant, so that the order of magnitude associated with the sub-factor is that of $N^{-\frac{1}{4}}$. Otherwise, if $n(1)$ and $n(2)$ are both positive, we have $n(1) \geq 1$ and $n(2) \geq 1$, and, in view of the redundancy of all the k's of the first kind, even if there is no redundancy among those of the second kind, the order of magnitude attached to the sub-factor is $N^{1-\frac{1}{2}[n(1)+n(2)]}$, which tends to 0 unless $n(1) = n(2) = 1$, and remains bounded if $n(1) = n(2) = 1$.

However, this order of magnitude is lowered if at least one of the k's of the second kind is redundant. But there is no difficulty in seeing that if the sub-factor is proper, such a redundancy must arise. Thus we are left with improper sub-factors which are quadratic in the h's of the first kind, and quartic in those of the second. The sum of all such factors corresponding to a given set of summation variables, say $k(1)$, $\alpha(1)$, $k(2)$, $\alpha(2)$, $\beta(2)$, is, clearly, nothing else but

$$N \operatorname{cov} [\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(u)})], \tag{21.2}$$

and from considerations similar to those adduced before it follows that if (21.2), with $u = 1, \ldots, m$, tend to definite limits, higher moments

tend to the respective moments of the multivariate normal distribution defined by these limiting values of the covariances. The conclusion is that the limiting joint distribution of (19.1) and (20.2) is normal, the case when not all the moments of the ε's exist being taken care of by the device introduced in Section 8; there remains only to find the limit of the covariances.

The summand in each of the terms of the exact expression for (21.1) is a product of V's with indices adding up to 6. But if this product reduces to one V_6, then, clearly, not only $k(1)$, but also $k(2)$ is redundant, and such a term tends to 0; the same remark can easily be seen to apply to a product of two V_3's. Moreover, in the case of a product of one V_2 and one V_4, $k(2)$ is still redundant unless it forms two links between the two V's. Finally, when we have three V_2's, the graph corresponding to the factor (cf. Section 17) is necessarily a triangle, since otherwise quadratic sub-factors would be formed, and these are known to cancel out. Thus we are left with the following two schemes, in which, for the time being, the positions of $|k(1)|$ and $|k(2)|$ are ignored.

(i) $A^{(u)}_{k(1)}\, V_2[\alpha(1), \alpha(2)]\, V_2[\alpha(2), \beta(2)]\, V_2[\beta(2), \alpha(1)]$;

(ii) $A^{(u)}_{k(1)}\, V_4[\alpha(1), \alpha(1), \alpha(2), \beta(2)]\, V_2[\alpha(2), \beta(2)]$.

With the first scheme, $|k(1)|$ may appear in either extreme V_2, but one case is transformed into the other by permuting $\alpha(2)$ with $\beta(2)$, so that we can assume, for instance, that $|k(1)|$ appears at the end, and then double the number of terms. If the value of $|k(2)|$ cannot be deduced from the sequence of index values of the h's in a given term of the sum, it can be seen in the same way in which it was demonstrated before that $|k(2)|$ can take only two combined positions out of the four possible. Thus, if we include the cumulants, a summand following the scheme (i) takes each of the following two forms twice

(ia) $A^{(u)}_{k(1)}\, R_{\alpha(2)-\alpha(1)}\, R_{\beta(2)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(1)-\beta(2)+|k(1)|}$;

(ib) $A^{(u)}_{k(1)}\, R_{\alpha(2)-\alpha(1)+|k(2)|}\, R_{\beta(2)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(1)-\beta(2)-|k(2)|+|k(1)|}$.

In both cases, the summand can be represented as

$$A^{(u)}_{s}\, R_p\, R_q\, R_{-p-q-|s|}, \tag{21.4}$$

with

$$s = k(1);\ p = \alpha(2) - \alpha(1);\ q = \beta(2) - \alpha(2) \tag{21.5}$$

in the first case, and

$$s = k(1);\ p = \alpha(2) - \alpha(1) + |k(2)|;\ q = \beta(2) - \alpha(2) \tag{21.6}$$

in the second, always subject to the inequalities

$$1 \leq \alpha(1) \leq N - |k(1)|;\ 1 \leq \alpha(2) \leq N - |k(2)|;$$
$$1 \leq \beta(2) \leq N - |k(2)|;\ |k(1)|, |k(2)| \leq \theta N. \tag{21.7}$$

Remembering the factor N^{-2} in front of the sums, the limit of the corresponding term in (21.2) can be obtained by applying Lemma 18.1 to the absolutely convergent sum of (21.4), $c^{(N)}_{p,q,s}$ being now N^{-2} times the number of solutions, in integers, of (21.5) for (ia) and (21.6) for (ib), in both cases subject to the inequalities (21.7). In either case, given $k(2)$, and assuming $|s| \leq \theta N$, the number of solutions is contained between $N - |k(2)| - |p| - |q| - |s|$ and $N - |k(2)|$. Consequently,

$$c^{(N)}_{p,q,s} \to 2\theta - \theta^2. \tag{21.8}$$

Thus the joint contribution of the four terms which are covered by the scheme (i) tends to

$$4(2\theta - \theta^2) \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_s R_p R_q R_{-p-q-|s|}.$$

But, for any s,

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} R_p R_q R_{-p-q-|s|} = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} R_p R_q R_{-p-q-s},$$

so that the previous expression can be represented as

$$4(2\theta - \theta^2) \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_s R_p R_q R_{-p-q-s}. \tag{21.9}$$

In the case of the second scheme, in view of the symmetry of the V's with respect to their arguments, permutations of $\alpha(1)$ with $\alpha(1) + |k(1)|$ do not create further terms, while, in the terms which do not vanish in the limit, there are only two possible combined positions of $|k(2)|$. Consequently, we have the following two terms:

(iia) $\varkappa_4 A^{(u)}_{k(1)} R_{\beta(2)-\alpha(2)} V_4[\alpha(2) - \alpha(1), \beta(2) - \alpha(1), 0, |k(1)|]$;

(iib) $\varkappa_4 A^{(u)}_{k(1)} R_{\beta(2)-\alpha(2)} V_4[\alpha(2) - \alpha(1) + |k(2)|, \beta(2) - \alpha(1) + |k(2)|, 0, |k(1)|]$.

Both are of the form of

$$\varkappa_4 A^{(u)}_s R_q V_4[p, p+q, 0, |s|]$$

with p, q, and s given by (21.5) in the first case, and by (21.6) in the second; following the same method as before, we find that the joint contribution of (iia) and (iib) to the variance tends to

$$2(2\theta-\theta^2)\varkappa_4 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)} R_q V_4[p, p+q, 0, |s|] =$$

$$= 2(2\theta-\theta^2)\varkappa_4 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)} R_q V_4[p, p+q, 0, s] = 2(2\theta-\theta^2)\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)} R_s,$$

and adding this contribution to (21.9), we find (21.1). Hence the proof is complete.

Corollary 21.2. Under the assumptions H_8^* if $0 < \theta \leq 1$, the joint distribution of $N^{1/2}[\Delta_{N,[\theta N]} - E(\Delta_{N,[\theta N]})]$ and $N^{1/2}\Psi_{N,[\theta N]}(R)$ tends to a normal bivariate distribution with zero means, variances given by (19.14) and by Corollary 20.2, and a covariance determined by

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}[\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(R)] = (2\theta-\theta^2)(4\mathfrak{S}_4 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2^2); \quad (21.10)$$

in particular, if $\theta = 1$, (19.14) becomes (19.15), and (21.10) simplifies to

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}[\Delta_{N,N-1}, \Psi_{N,N-1}(R)] = 4\mathfrak{S}_4 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2^2. \quad (21.11)$$

22. The asymptotic distribution of $S_{N,[\theta N]}$ and of some statistics connected with the reduced spectrum

Owing to (20.9), the asymptotic distribution and moments of $S_{N,[\theta N]}$ are implicit in Corollary 21.2; thus we have the following:

Proposition 22.1. Under the assumptions H_8^*, if $0 < \theta \leq 1$, the distribution of $N^{1/2}[S_{N,[\theta N]} - E(S_{N,[\theta N]})]$ tends to a normal distribution with a zero mean and with a variance equal to

$$\frac{8+40\theta+24\theta^2-40\theta^3}{(1+2\theta-\theta^2)^2}\mathfrak{S}_4 + \frac{4+16\theta+8\theta^2-{}^{40}/_3\,\theta^3}{(1+2\theta-\theta^2)^2}\cdot\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2^2 \text{ when } \theta \leq 1/2;$$

and to

$$\frac{{}^8/_3+72\theta-40\theta^2+{}^8/_3\,\theta^3}{(1+2\theta-\theta^2)^2}\mathfrak{S}_4 + \frac{{}^8/_3+24\theta-8\theta^2-{}^8/_3\,\theta^3}{(1+2\theta-\theta^2)^2}\cdot\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2^2 \text{ when } \theta \geq 1/2;$$

under the assumptions $H_{4m}(m > 1)$, the moments of $N^{1/2}[S_{N,[\theta N]} - E(S_{N,[\theta N]})]$ up to the order m tend to the corresponding moments of the distribution specified above.

It is, in general, remarkable how little this asymptotic variance is affected by the choice of θ; in particular, the differences in the coefficient of $\varkappa_4\varkappa_2^{-2}\mathfrak{S}_2^2$ are practically negligible. The analytic continuity of each of the coefficients of $\mathfrak{S}_4$ and of $\varkappa_4\varkappa_2^{-2}\mathfrak{S}_2^2$ is broken at the point

$\theta = 1/2$, but the discontinuity appears only in the third derivatives. Each of these coefficients has a unique maximum in the interval [0, 1]; in either case, this maximum occurs not far from the middle of the interval, but while the coefficient of $\mathfrak{S}_4$ has a maximum at $\theta = 0.537766\ldots$, the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2} \mathfrak{S}_2^2$ takes its greatest value when

$$\theta = (-2 + \sqrt{19})/5 \simeq 0.47178.$$

The numerical values of the two coefficients are tabulated below:

	Coefficient of $\mathfrak{S}_4$	Coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2} \mathfrak{S}_2^2$	Remarks
0	8	4	Limiting case; the first two derivatives of the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2} \mathfrak{S}_2^2$ vanish.
0.1000	8.6152	4.0016	
0.2000	8.9965	4.0081	
0.3000	9.2452	3.0174	
0.4000	9.3992	4.0251	Maximum of the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2} \mathfrak{S}_2^2$.
0.4718	9.4583	4.0277	
0.5000	9.4694	4.0272	Break in analytic continuity.
0.5378	9.4744	4.0253	Maximum of the coefficient of $\mathfrak{S}_4$.
0.6000	9.4644	4.0202	
0.7000	9.4244	4.0109	
0.8000	9.3794	4.0039	
0.9000	9.3459	4.0006	The first two derivatives of the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2} \mathfrak{S}_2^2$ vanish.
1.0000	$28/3 = 9.333$	4.3	

Obviously, in practical applications, θ will be made either small or equal to 1. In the latter case, the formulae simplify greatly, yielding

$$\lim_{N \to \infty} N \operatorname{var} S_{N, N-1} = \frac{28}{3} \mathfrak{S}_4 + 4 \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \mathfrak{S}_2^2. \tag{22.1}$$

Considerations similar to those of Section 15 can now be extended to further statistics connected with the reduced spectrum. In the first place, it is easy to see that if we introduce

$$m[p_N^{(\nu)}(\omega)] = \int_{-1/2}^{1/2} [p_N^{(\nu)}(\omega) - f'(\omega)]^2 \, d\omega$$

as a figure of merit of $p_N^{(\nu)}(\omega)$ regarded as an estimator of $f'(\omega)$, assuming only that ν tends to infinity with N, and if we make

$$\delta_{N, \nu} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 (r_{k, N} - \varrho_k)^2,$$

the asymptotic distribution of $m[p_N^{(\nu)}(\omega)]$ is the same as that of $\delta_{N,\nu}$. But

$$N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\,[\delta_{N,\nu} - R^{-2}\,E(\Delta_{N,\nu})] = \frac{N}{(2\nu+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot \frac{R_0^2\,\Delta_{N,\nu} - C_{0,N}^2 E(\Delta_{N,\nu}) - 2R_0\Psi_{N,\nu}(R)(C_{0,N}-R_0) + (C_{0,N}-R_0)^2\Sigma(1-N^{-1}|k|)^2 R_k^2}{R_0^2\,C_{0,N}^2},$$

and the last two terms of the numerator clearly tend to 0 in the mean, even when multiplied by the normalizing factor in front of the fraction. Thus the asymptotic distribution of the expression above is the same as that of

$$\frac{N}{(2\nu+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{R_0^2[\Delta_{N,\nu}-E(\Delta_{N,\nu})]-2R_0E(\Delta_{N,\nu})(C_{0,N}-R_0)-E(\Delta_{N,\nu})(C_{0,N}-R_0)^2}{R_0^2\,C_{0,N}^2}.$$

Here, again, the last term is asymptotically negligible in any case, while, as a consequence of $E(\Delta_{N,\nu}) = O(\nu/N)$, the second term is also negligible whenever $\nu/N \to 0$. Hence the following:

Proposition 22.2. Under the assumptions $H_8{}^*$, if (14.3) holds, the distributions of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\{m[p_N^{(\nu)}(\omega)] - R_0^{-2}\,M[T_N^{(\nu)}(\omega)]\}$ and of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\,[\delta_{N,\nu} - R_0^{-2}\,E(\Delta_{N,\nu})]$ both tend, when $N\to\infty$, to a normal distribution with a zero mean and a variance equal to $4\,\mathfrak{f}_4$, where

$$\mathfrak{f}_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[f'(\omega)]^n\,d\omega = \sum_{k(1)+\ldots+k(n)=0} \varrho_{k(1)}\cdots\varrho_{k(n)} = R_0^{-n}\,\mathfrak{S}_n \quad (n=2,3,\ldots). \tag{22.2}$$

Moreover, under the assumptions H_{12m}^*, these two statistics have finite moments of all the orders lower than $2m$, and, when $N\to\infty$, these moments tend to the respective moments of the aforesaid distribution.

The last conclusion is based on the fact that the expressions are $o(N^{8/5})$. There would be no difficulty in extending this investigation to the case when $\nu = [\theta N]$. However, it may be more interesting directly to study an estimator of $\mathfrak{f}_2$, which, in the case of the reduced spectrum, plays the part previously played by $\mathfrak{S}_2$. Such an estimator is given by the formula

$$s_{N,[\theta N]} = C_{0,N}^{-2}\,S_{N,[\theta N]}.$$

Its properties depend on the joint distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}$, $\Psi_{N,[\theta N]}(R)$, and $C_{0,N}$. Their asymptotic joint distribution is implicitly specified by Propositions 19.1, 20.1 and 21.1, since clearly, $C_{0,N}-R_0=\Psi_{N,[\theta N]}(U)$ where $U_0 = 1$ and $U_k = 0$ whenever $k \neq 0$. Thus, for any θ such that $0 < \theta \leq 1$, the distribution in question is normal, and its variances

and covariances are given by (19.14), by Corollaries 20.2 and 21.2, and by the following three relations:

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}(\Delta_{N,[\theta N]}, C_{0,N}) = (2\theta - \theta^2)(4\mathfrak{S}_3 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \mathfrak{S}_2); \tag{22.3}$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}[\Psi_{N,[\theta N]}(R), C_{0,N}] = 2\mathfrak{S}_3 + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \mathfrak{S}_2; \tag{22.4}$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} C_{0,N} = 2\mathfrak{S}_2 + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0^2. \tag{22.5}$$

Hence also, in view of (20.9), the asymptotic joint normality of $S_{N,[\theta N]}$ and $C_{0,N}$, with

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}(S_{N,[\theta N]}, C_{0,N}) = 4\mathfrak{S}_3 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \mathfrak{S}_2 \tag{22.6}$$

irrespective of the particular value taken by θ.

Now, clearly

$$s_{N,N-1} - \frac{E(S_{N,N-1})}{R_0^2} =$$

$$= \frac{R_0^2[S_{N,N-1} - E(S_{N,N-1})] - 2R_0 E(S_{N,N-1})(C_{0,N} - R_0) - E(S_{N,N-1})(C_{0,N} - R_0)^2}{R_0^2 C_{0,N}^2},$$

the last term in the numerator being asymptotically negligible in comparison with the first two. Hence the following:

Proposition 22.3. Under the assumptions H_8^*, the distribution of

$$N^{1/2}[s_{N,N-1} - R_0^{-2} E(S_{N,N-1})] \tag{22.7}$$

tends, when $N \to \infty$, to a normal distribution with a zero mean and a variance equal to

$$^{28}/_3 \int_4 - 16 \int_2 \int_3 + 8 \int_2^3. \tag{22.8}$$

Moreover, under the assumptions $H_{12m}^*(m > 1)$, (22.7) has finite moments of every order lower than $2m$, and these moments tend to the respective moments of the aforesaid distribution.

Since, according to the Schwarz inequality, $\int_3 \leq \int_4^{1/4} \int_2^{1/2}$, (22.8) is bigger than, or equal to, $^4/_3 \int_4$, the equality taking place if, and only if, $f'(\omega) = 1$ everywhere, in which case this reduces to 4/3. It is remarkable that this asymptotic variance is independent of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ (cf. *Bartlett's* guess [22]). However, if the same argument is applied to $s_{N,[\theta N]}$ with $\theta < 1$, which presents no difficulty, in the resulting formula, which is rather cumbersome, a term in $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ will reappear, though with a

very small coefficient, the whole difference in comparison with $\lim N \operatorname{var} s_{N,N-1}$ being due to the change in $\lim N \operatorname{var} S_{N,[\theta N}$ when θ is no longer equal to 1.

23. Acknowledgements

The authors wish wholeheartedly to thank Mr. J. D. North, Chairman and Managing Director of Boulton Paul Aircraft, Ltd., for his continuing patronage of their work, and for his permission to publish the results of their research.

References

[2] *H. Cramér*, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946.

[6] *U. Grenander*, "On empirical spectral analysis of stochastic processes", Ark. Mat., Vol. 1 (1951), pp. 503—531.

[7] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, "Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes", Ann. Math. Stat., Vol. 24. (1953), pp. 537—558.

[14] *Z. A. Lomnicki* and *S. K. Zaremba*, "On estimating the spectral density function of a stochastic process", J. Roy, Statist. Soc., Ser. B, Vol. 19 (1957), pp. 13—37.

[20] *M. S. Bartlett*, "Smoothing periodograms from time series with continuous spectra", Nature, Vol. 161 (1948), pp. 686—687.

[21] *M. S. Bartlett*, "Periodogram analysis and continuous spectra", Biometrika, Vol. 37 (1950), pp. 1—16.

[22] *M. S. Bartlett*, "Problèmes de l'analyse spectrale des séries temporelles stationnaires", Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, Vol. 3 (1954), pp. 119—134.

[23] *J. L. Doob*, "Time series and harmonic analysis", Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, edited by J. Neyman, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1949, pp. 303—343.

[24] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, Statistical analysis of stationary time series, John Wiley & Sons, New York, 1957.

[25] *E. Parzen*, "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series", Ann. Math. Stat., Vol. 28 (1957), pp. 329—348.

[26] *E. Parzen*, "A central limit theorem for multilinear stochastic processes", Ann. Math. Statist., Vol. 28 (1957), pp. 252—255.

[27] *J. W. Tukey*, "The sampling theory of power spectrum estimates", Symposium on Application of Autocorrelation Analysis to Physical Problems, Woods Hole, Mass., 13—14 July 1949, Office of Naval Research, Dept. of Navy, Washington D. C.

Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen

Von

Walter Kautny, Wien

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 25. Juni 1958)

§ 1. Einleitung

Als „*harmonischer Umschwung*" wird jene Raumbewegung bezeichnet, die sich aus einer gleichförmigen Drehung um eine Achse z und einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse zusammensetzt. Unter Verwendung des Drehwinkels σ als Parameter kann diese Bewegung in Zylinderkoordinaten r, φ, z durch

$$r = r_0,\ \varphi = \varphi_0 + \sigma,\quad z = z_0 + h \,.\, \sin n\sigma \tag{1}$$

beschrieben werden; die positiv vorausgesetzten Konstanten h und n werden die Amplitude bzw. Frequenz des Umschwungs genannt. Es handelt sich um eine naheliegende Verallgemeinerung des durch $n = 1$ gekennzeichneten „vollkommen steilen Umschwungs" von *Mannheim-Darboux* mit lauter Ellipsen als Bahnkurven.

In einer vorangegangenen, im folgenden kurz mit „I" zitierten Arbeit[1] wurden vor allem die Punktbahnen („Umschwungkurven") und die von mitgenommenen Ebenen eingehüllten abwickelbaren Flächen („Umschwungtorsen") studiert. Die vorliegende Mitteilung ist nun den durch eine umschwingende Gerade erzeugten (windschiefen) Strahlflächen gewidmet, die „*Umschwungstrahlflächen*" genannt werden. Diese speziellen Flächen, die für rationale Frequenz n rational-algebraisch ausfallen, sind durch verschiedene bemerkenswerte Eigenschaften und großen Formenreichtum ausgezeichnet, gestatten jedoch

[1] *W. Kautny*, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Mh. Math. **60** (1956), 66–82.

infolge ihres einfachen gemeinsamen Entstehungsgesetzes eine ins Detail gehende Untersuchung im kleinen wie im großen.

An bekannten Flächen finden sich unter ihnen für $n = 2$ das Plückerkonoid und für $n = 1$ gewisse metrisch spezielle Strahlflächen 4. Grades, die bereits von *J. Krames* untersucht und „Θ-Flächen" genannt worden sind[2].

§ 2. Klassifikation

Es soll zunächst mittels $x = r.\cos\sigma$, $y = r.\sin\sigma$ zu kartesischen Koordinaten übergegangen werden. Die Bewegungsgleichungen (1) nehmen dann folgende Form an:

$$x = x_0\cos\sigma - y_0\sin\sigma,\quad y = x_0\sin\sigma + y_0\cos\sigma,\quad z = z_0 + h\,.\,\sin n\sigma. \tag{2}$$

Da zwei einem Umschwung unterworfene Geraden, die gegenüber der Achse z dieselbe, durch Abstand a und Winkel $\beta \neq 0$ gekennzeichnete Lage besitzen, kongruente Strahlflächen erzeugen, so bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, die zu $\sigma = 0$ gehörige Anfangslage g_0 als normale Treffgerade der x-Achse anzunehmen. Ihre Darstellung lautet dann mit Verwendung eines Längenparameters v und der Abkürzung $\operatorname{ctg}\beta = b$:

$$x_0 = a,\quad y_0 = v,\quad z_0 = b.v. \tag{3}$$

Eintragung in (2) liefert eine *Parameterdarstellung der Umschwungstrahlfläche* mit σ und v als Flächenparametern:

$$x = a\,.\,\cos\sigma - v\,.\,\sin\sigma,\quad y = a\,.\,\sin\sigma + v\,.\,\cos\sigma,\quad z = b\,.\,v + h\,.\,\sin n\sigma. \tag{4}$$

Die zugehörigen Parameterlinien $\sigma = \text{const}$ sind die geradlinigen *Erzeugenden* g der Fläche, während durch $v = \text{const}$ die auf der Fläche verlaufenden *Umschwungbahnen* der einzelnen Punkte von g_0 gekennzeichnet sind.

Nach dem Vorbild der Strahlschraubflächen[3] kann auch hier folgende Typenunterscheidung vorgenommen werden: Eine Umschwungstrahlfläche soll „*geschlossen*" oder „*offen*" heißen, je nachdem ihre Erzeugenden die Achse schneiden oder nicht; ferner soll sie „*gerade*" oder „*schief*" genannt werden, je nachdem die Erzeugenden mit der Achse einen rechten Winkel einschließen oder nicht. Dementsprechend ergeben sich vier wesentlich verschiedene Typen:

---

[2] *J. Krames*, Über die durch aufrechte Ellipsenbewegung erzeugten Regelflächen Θ. Jahresber. DMV **50** (1940), 58–65.

[3] *E. Müller* und *E. Kruppa*, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Leipzig u. Berlin, 1936, S. 201.

1. Schiefe offene Umschwungstrahlflächen ($a \neq 0, b \neq 0$; Abb. 1),

2. schiefe geschlossene Umschwungstrahlflächen ($a = 0, b \neq 0$; Abb. 2),

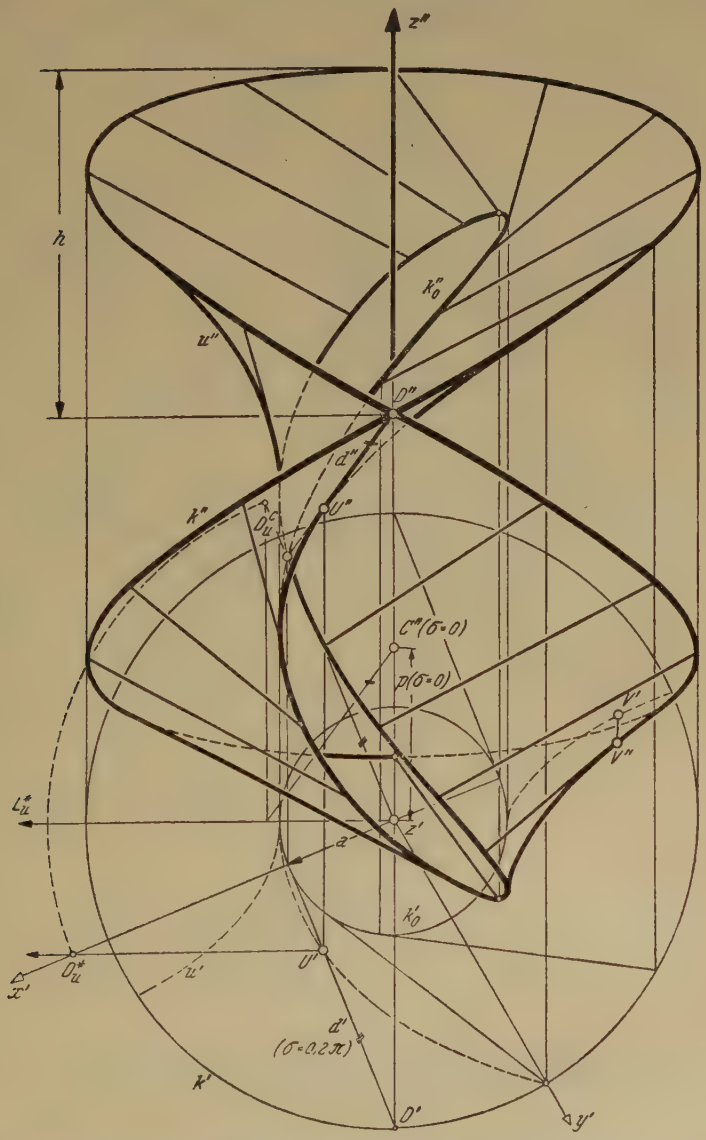

Abb. 1. Schiefe offene Umschwungstrahlfläche 6. Ordnung; $n = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Selbstschnitt: Doppelerzeugende d und Kurve 7. Ordnung

3. gerade offene Umschwungstrahlflächen ($a \neq 0, b = 0$; Abb. 3),
4. gerade geschlossene Umschwungstrahlflächen („Umschwungwendelflächen") ($a = 0, b = 0$; Abb. 4).

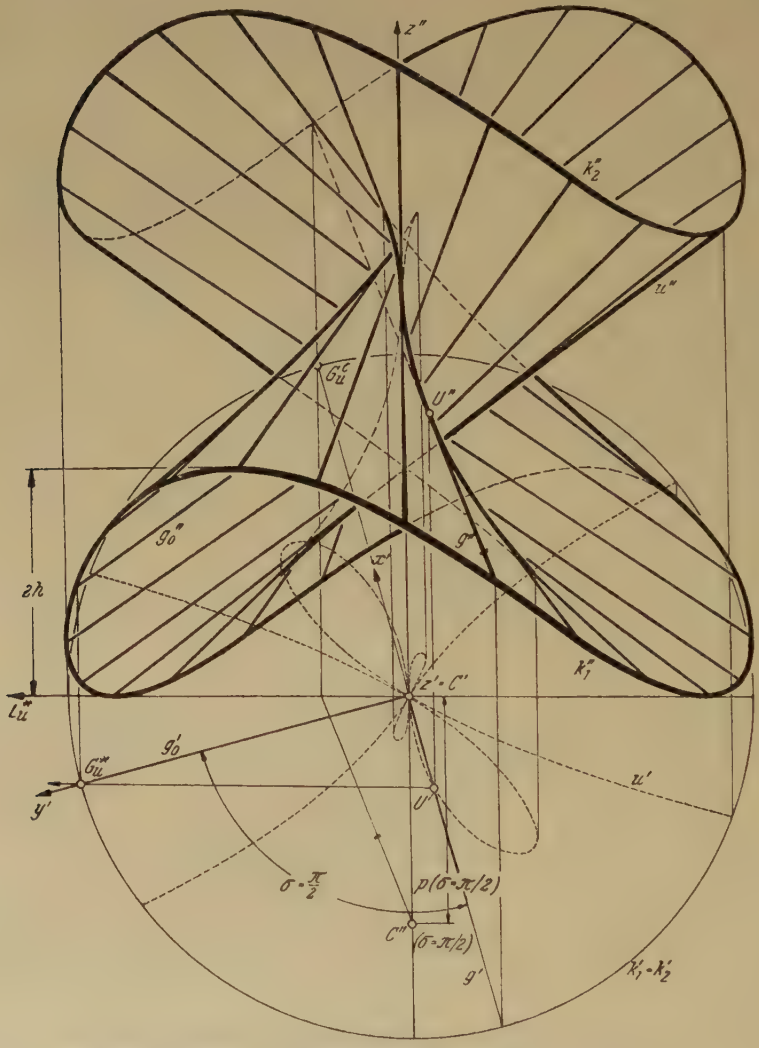

Abb. 2. Schiefe geschlossene Umschwungstrahlfläche 6. Ordnung; $n = 2, a = 0, b = -\frac{2}{3}$. Selbstschnitt längs der Achse

Die *schiefen* Typen besitzen einen *Richtkegel* in Gestalt eines Drehkegels mit der Achse z und dem Öffnungswinkel 2β, zu dessen Mantel-

strahlen die Flächenerzeugenden parallel sind; er artet für die *geraden* Typen zu einer z-normalen *Richtebene* aus.

Die *offenen* Typen sind dem *Drehzylinder* $r = a$ berührend angeschrieben, und zwar längs der Umschwungkurve $v = 0$, der Bahn des der Achse nächstgelegenen Erzeugendenpunktes; diese „*Kehl-*

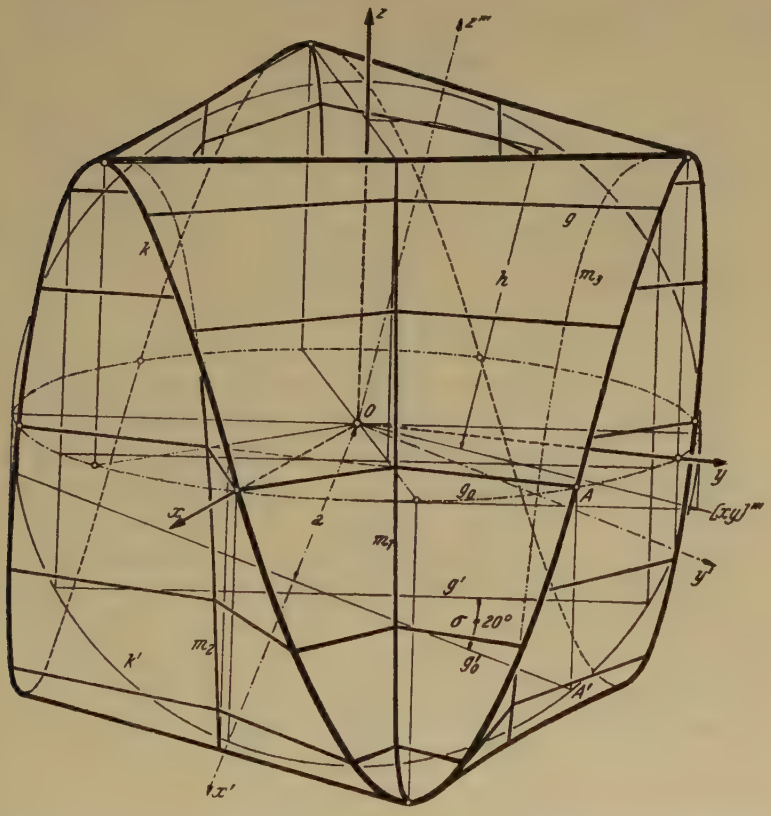

Abb. 3. Gerade offene Umschwungstrahlfläche 8. Ordnung in axonometrischer Darstellung; $n = 3$, $b = 0$. Selbstschnitt: Drei Meridiane m_i und eine Umschwungkurve k

linie" schrumpft bei den *geschlossenen* Typen auf einen Abschnitt der Achse ein. Sie stellt nach einem bekannten Satz über Strahlflächen mit Richtdrehkegel die *Striktionslinie* der Fläche dar[4]. Das zugehörige

[4] *E. Müller* und *J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Wien, 1931, S. 136.

Striktionsband ist wieder eine Umschwungstrahlfläche mit derselben Kehllinie und wird durch $\bar{\beta} = \beta + \pi/2$ ($\bar{b} = -1/b$) gekennzeichnet, da die zusammengehörigen Erzeugenden der beiden Flächen orthogonal sind.

Die in Rede stehenden Flächen besitzen einen *periodischen Aufbau* und gewisse *Symmetrien*. Als Fundamentalbereich kann der Streifen

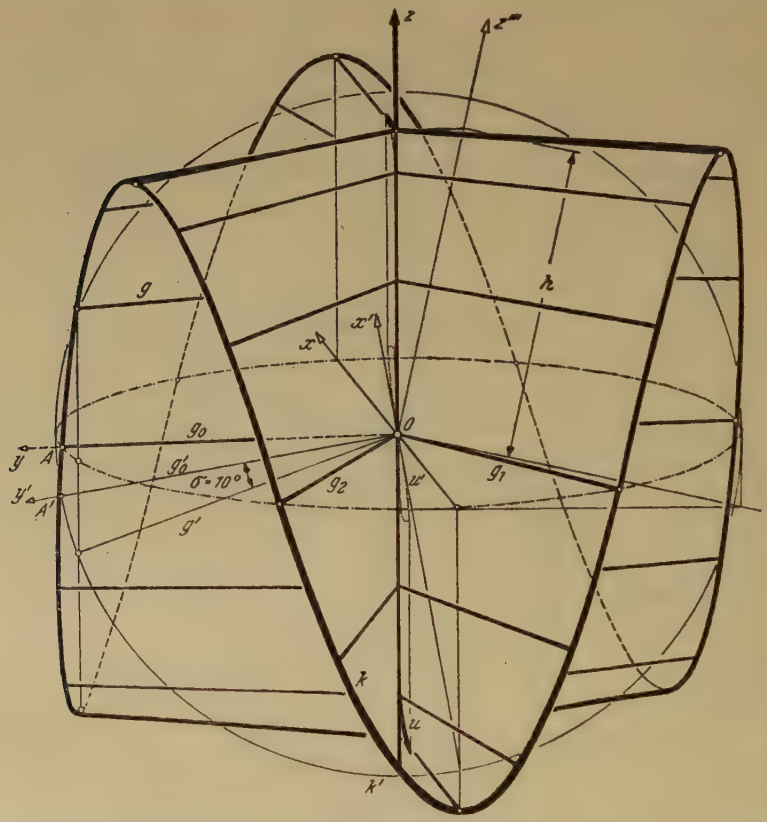

Abb. 4. Gerade geschlossene Umschwungstrahlfläche 8. Ordnung in axonometrischer Darstellung; $n = 3$, $a = b = 0$. Selbstschnitt: Drei Doppelerzeugende g_i

$0 \leq \sigma \leq \pi/n$ angesehen werden, der durch Spiegelung an der x-Achse zu ergänzen und anschließend durch Drehung um Vielfache von $2\pi/n$ um die z-Achse zu wiederholen ist.

§ 3. Konstruktive Behandlung

Die darstellend-geometrische Behandlung der Umschwungstrahlflächen wird von der *Umschwungbahn eines Punktes* der Erzeugenden

g_0 — am besten ihres Kehlpunktes — ausgehen; die hierzu nötigen Grundlagen sind in „I" zu finden. Da zu jeder Lage des benützten Punktes die *Richtung* der entsprechenden Erzeugendenlage bekannt ist, können beliebig viele Erzeugenden dargestellt werden; man wird sich dabei des *Richtdrehkegels* bei schiefen bzw. eines *Richtstrahlbüschels* bei geraden Umschwungstrahlflächen bedienen.

Mit Hilfe der Erzeugenden kann dann beispielsweise jeder *Schnitt* einer Umschwungstrahlfläche mit Ebenen oder krummen Flächen punktweise konstruiert werden.

Zur Erfassung der Differentialeigenschaften erster Ordnung, wie man sie etwa für Tangenten- und Umrißkonstruktionen benötigt, wird man die in jedem Augenblick existierende *Momentanschraubung* heranziehen, die durch dieselbe Achse z und den Schraubparameter

$$p = \frac{dz}{d\sigma} = hn \cdot \cos n\sigma \tag{5}$$

festgelegt ist: die Umschwungstrahlfläche wird längs der zu σ gehörigen Erzeugenden von der entsprechenden Strahlschraubfläche berührt.

Die zeichnerische Auswertung wird sich dabei mit Vorteil der von *Th. Schmid* bei der Schraubung eingeführten *„Drehfluchten"* bedienen[5]: Jeder Geraden g wird der in der xy-Ebene liegende Spurpunkt G_u^c der durch das „Hilfsauge" $C(0, 0, p)$ gelegten Parallelen zu g als „Fluchtpunkt", und der daraus durch Viertelschwenkung um O hervorgehende Punkt G_u^* als „Drehfluchtpunkt" zugeordnet; in analoger Weise wird die „Drehfluchtspur" einer Ebene erklärt. Auf Grund dieser Festsetzung gilt dann: *Der Drehfluchtpunkt einer Umschwungtangente fällt mit dem Grundriß ihres Berührungspunktes zusammen.* Ferner: *Die Drehfluchtspur der Tangentialebene einer Umschwungfläche fällt mit dem Grundriß der Flächennormalen zusammen.* Gegenüber der Schraubung ist hier bloß der Unterschied zu beachten, daß das Hilfsauge C nicht fest ist, da sich seine Höhenkote p gemäß (5) zeitlich verändert.

Als Anwendungsbeispiel zeigt Abb. 5 die Konstruktion der *Tangente s einer Schichtenlinie*: Die Tangentialebene τ in einem Punkt P der Umschwungstrahlfläche wird aufgespannt von der durch P gehenden Erzeugenden g und der Bahntangente t des Punktes P; die Drehfluchtspur t_u^* von τ ist daher die Verbindungslinie des Drehfluchtpunktes

[5] *Th. Schmid*, Darstellende Geometrie, Bd. 2, 2. Aufl., Berlin und Leipzig, 1923 (Sammlung Schubert), § 40.
E. Müller und *E. Kruppa*, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, 4. Aufl., Leipzig und Berlin, 1936, S. 199ff.

G_u^* von g mit dem Drehfluchtpunkt $T_u^* = P'$ von t. Die Tangente s der durch P gehenden Schichtenlinie verläuft dann normal zu t_u^*.

Anschließend sei auch noch die Konstruktion des *Umrisses* für Parallelprojektion (= Eigenschatten für Parallelbeleuchtung) besprochen. Da für den Umrißpunkt (Eigenschattenpunkt) P einer Erzeugenden g die Tangentialebene τ parallel zur Blickrichtung (Lichtrichtung) l sein muß, so muß die Drehfluchtspur $t_u^* = P'\,G_u^*$ von τ den Drehfluchtpunkt L_u^* von l enthalten. Der Grundriß P' des gesuchten Punktes P wird daher aus g' von der Verbindungsgeraden der vorschriftsmäßig zu ermittelnden Drehfluchtpunkte G_u^* und L_u^* ausgeschnitten (Abb. 5). Die Umrißkonstruktion hat bei der Herstellung der Abb. 1 bis 4 Anwendung gefunden.

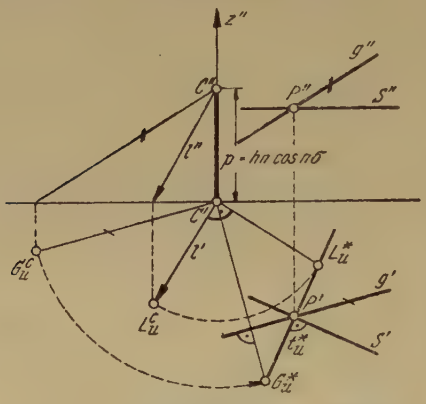

Abb. 5. Zur Ermittlung von Schichtentangenten und Umrißpunkten einer Umschwungstrahlfläche

§ 4. Algebraische Umschwungstrahlflächen

Wie die Bahnkurven des Umschwungs erweisen sich auch die Umschwungstrahlflächen für *rationale Frequenz* $n = \lambda/\mu$ (λ, μ positiv, ganz, teilerfremd) als *rational-algebraisch*, was unmittelbar aus Gl. (4) nach Einführung des neuen Parameters $u = e^{i\sigma/\mu}$ hervorgeht:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\,[\quad a\,.\,(u^{\mu} + u^{-\mu}) + vi\,.\,(u^{\mu} - u^{-\mu})] \\ y &= \tfrac{1}{2}\,[-ai\,.\,(u^{\mu} - u^{-\mu}) + v\,.\,(u^{\mu} + u^{-\mu})] \\ z &= \tfrac{1}{2}\,[-hi\,.\,(u^{\lambda} - u^{-\lambda}) + 2b\,.\,v]. \end{aligned} \tag{6}$$

Ebenso entnimmt man aus (4), daß die erzeugende Gerade die Fläche im allgemeinen genau einmal überstreicht, wenn σ ein Intervall der Länge $2\pi\mu$ durchläuft.

Zur Bestimmung der *Ordnung* der Fläche ermittelt man die Plückerkoordinaten der Erzeugenden mit Benützung der homogenen Koordinaten der zu $v = 0$ bzw. $v = \infty$ gehörigen Punkte P_0 und P_∞:

$$\begin{aligned} P_0 &\;[2,\; a\,.\,(u^{\mu} + u^{-\mu}),\; -ai\,.\,(u^{\mu} - u^{-\mu}),\; -hi\,.\,(u^{\lambda} - u^{-\lambda})] \\ P_\infty &\;[0,\; i\,.\,(u^{\mu} - u^{-\mu}),\qquad u^{\mu} + u^{-\mu},\quad 2b]. \end{aligned}$$

Man findet (bis auf einen Proportionalitätsfaktor)

$$p_{01} = i \,.\, u^{\lambda}(u^{2\mu} - 1),\ p_{02} = u^{\lambda}(u^{2\mu} + 1),\ p_{03} = 2\,b \,.\, u^{\lambda+\mu},$$

$$p_{23} = -abi \,.\, u^{\lambda}(u^{2\mu} - 1) + \frac{hi}{2} \,.\, (u^{2\mu} + 1)\,(u^{2\lambda} - 1), \tag{7}$$

$$p_{31} = -ab \,.\, u^{\lambda}(u^{2\mu} + 1) + \frac{h}{2} \,.\, (u^{2\mu} - 1)\,(u^{2\lambda} - 1),\ p_{12} = 2a \,.\, u^{\lambda+\mu}.$$

Die Schnittbedingung mit einer allgemeinen Testgeraden q_{ik} führt dann auf eine algebraische Gleichung in u vom Grad

$$N = 2 \,.\, (\lambda + \mu), \tag{8}$$

der die gesuchte Flächenordnung darstellt. Lediglich für jene Umschwungwendelflächen ($a = b = 0$), für die λ gerade ist, erniedrigt sich die Ordnung auf die Hälfte, da diese speziellen Flächen für $0 \leq \sigma < 2\,\mu\pi$ doppelt überdeckt erscheinen; naturgemäß sind hier auch alle übrigen algebraischen Charaktere auf die Hälfte zu reduzieren.

Jene Erzeugenden, die die Kehllinie $v = 0$ berühren, sind *Torsallinien* der Fläche. Da der Anstieg der Kehllinie den Wert $hn \,.\, \cos n\sigma/a$ hat, ergeben sich die Parameterwerte σ der Torsalerzeugenden aus $\cos n\sigma = ab/hn$. Im algebraischen Falle treten mithin $2\,\lambda$ derartige Erzeugende auf, die für $ab = \pm\, hn$ paarweise zusammenrücken.

Die zu den Parameterwerten $u = 0$ und $u = \infty$ gehörigen Flächenerzeugenden sind im allgemeinen *singulär*. Ihre Plückerkoordinaten lauten gemäß (7)

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = 0 : 0 : 0 : 1 : \pm\, i : 0,$$

woraus zu erkennen ist, daß diese Geraden die Ferngeraden der Minimalebenen $x \pm iy = 0$ sind, also die durch den Fernpunkt der Achse verlaufenden Tangenten an den absoluten Kegelschnitt. Im algebraischen Fall haben diese Fernerzeugenden die Vielfachheit

$$s = \min(\lambda, 2\,\mu).$$

Eine genauere Untersuchung lehrt dann, daß es sich mit Ausnahme des Falles $\lambda = 2\,\mu$ auch um *Torsalerzeugende* handelt, und zwar sind die zugehörigen Tangentialebenen für $\lambda < 2\,\mu$ die durch die Achse gehenden Minimalebenen $x \pm iy = 0$, während sie für $\lambda > 2\,\mu$ mit der Fernebene zusammenfallen. Im Grenzfall $\lambda = 2\,\mu$ ($\lambda{=}2$, $\mu = 1$) liegt im allgemeinen eine Umschwungstrahlfläche 6. Grades vor, die längs ihrer Fernerzeugenden windschiefe Rückkehrkanten aufweist; lediglich

bei der Umschwungwendelfläche ($a = b = 0$) — dem doppelt überdeckt zu denkenden, kubischen *Plückerkonoid* — sind diese Ferngeraden einfache, reguläre Erzeugenden.

Für den Schnitt einer Umschwungstrahlfläche mit der Fernebene zählen die Fernerzeugenden $x \pm iy = 0$ je λ-fach: schneidet man nämlich die durch (7) bestimmte Fläche mit einer beliebigen Ferngeraden $(0:0:0:q_{23}:q_{31}:q_{12})$, so führt die Schnittbedingung auf eine algebraische Gleichung in u, deren niedrigster Exponent λ ist, die also $u = 0$ (und analog $u = \infty$) als λ-fache Nullstelle besitzt. Somit fehlt vom Gesamtschnitt der Ordnung $N = 2(\lambda + \mu)$ der Fläche mit der Fernebene noch ein Bestandteil der Ordnung 2μ, der aber unschwer ausfindig zu machen ist: Mit Rücksicht auf die feste Neigung der Erzeugenden gegen die Achse und wegen ihres μ-maligen Umlaufs bis zur Rückkehr in die Ausgangslage ergibt sich der Restschnitt in einem *μ-fach zu zählenden Fernkreis*, der im Falle gerader Umschwungstrahlflächen zur 2μ-fach zu zählenden Ferngeraden der achsennormalen Stellung ausartet.

Als Ausnahme ist wieder die Umschwungwendelfläche mit geradem λ zu erwähnen: für sie zählt die Ferngerade der achsennormalen Stellung nur μ-fach, die Ferngeraden zählen je $(\lambda/2)$-fach.

§ 5. Schichtenlinien der schiefen Umschwungstrahlflächen

Die aus den schiefen Umschwungstrahlflächen von achsennormalen Ebenen $z = c$ ausgeschnittenen *Schichtenlinien* werden auf Grund der Darstellung (4) durch

$$v = \frac{c - h \,.\, \sin n\sigma}{b}$$

gekennzeichnet. Man gewinnt damit über die Parametergleichungen

$$x = a \,.\cos\sigma - \frac{c - h \,.\, \sin n\sigma}{b} \,.\, \sin\sigma,\quad y = a \,.\sin\sigma + \frac{c - h \,.\, \sin n\sigma}{b} \cdot \cos\sigma \qquad (9)$$

die folgende komplexe Darstellung der Schichtenlinie:

$$\mathfrak{z} = x + iy = \mathfrak{a}_1 \,.\, e^{i\sigma} + \mathfrak{a}_2 \,.\, e^{i(1-n)\sigma} - \mathfrak{a}_2 \,.\, e^{i(1+n)\sigma} \qquad (10)$$

$$\text{mit } \mathfrak{a}_1 = a + \frac{c}{b} \cdot i,\ \mathfrak{a}_2 = \frac{h}{2b}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß es sich dabei im allgemeinen um eine *Rad-*

linie 3. Stufe der Sippe $1:(1-n):(1+n)$ handelt[6]. Im Falle des *Mannheim-Darboux*schen Umschwungs ($n=1$) reduzieren sich die Schichtenlinien auf gewöhnliche Radlinien der Sippe $1:2$, also (exzentrisch angeordnete) *Pascal*schnecken[2].

Bei den schiefen *geschlossenen* Umschwungstrahlflächen ($a=0$) vereinfacht sich Gl. (9) der Schichtenlinie, und die daraus fließende Polarkoordinatendarstellung

$$r = -\frac{h}{b} \cdot \sin n\sigma + \frac{c}{b}$$

lehrt, daß es sich hier um eine spezielle Radlinie 3. Stufe, nämlich um eine *Konchoide der Rosenkurve* $c=0$ handelt. Für die Mittelebene $z=0$ ergibt sich als Spurkurve die Rosenkurve selbst.

Im algebraischen Fall ($n=\lambda/\mu$) sind die genannten Radlinien durchwegs *zirkulare Kurven der Ordnung* $2\,.\,(\lambda+\mu)$. Für $\mu>\lambda$ sind die absoluten Punkte der Schichtenebene $(\lambda+\mu)$-fache Punkte der Kurve mit den Minimalgeraden $x \pm iy = 0$ als Tangenten, für $\mu<\lambda$ zählen diese Punkte $2\,\mu$-fach und die Ferngerade ist gemeinsame Tangente.

§ 6. Selbstschnitte der Umschwungstrahlflächen

Punkte von *Selbstschnitten* einer Strahlfläche sind im allgemeinen dadurch charakterisiert, daß durch sie zwei Flächenerzeugende hindurchgehen. Sind (σ, v) und $(\bar{\sigma}, \bar{v})$ die einem solchen Punkt zukommenden Parameterwerte, so bestehen wegen (4) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= a\,.\cos\sigma - v\,.\sin\sigma = a\,.\cos\bar{\sigma} - \bar{v}\,.\sin\bar{\sigma} \\ y &= a\,.\sin\sigma + v\,.\cos\sigma = a\,.\sin\bar{\sigma} + \bar{v}\,.\cos\bar{\sigma} \\ z &= h\,.\sin n\sigma + bv \quad\;\; = h\,.\sin n\bar{\sigma} + b\bar{v}. \end{aligned} \tag{11}$$

Aus den beiden ersten entnimmt man zunächst

$$v = -\bar{v} = -a\,.\,\mathrm{tg}\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}.$$

Setzt man dann zur Abkürzung

$$\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2} = \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2} = \psi,$$

so erhält man durch Mittelbildung in

[6] *W. Wunderlich*, Höhere Radlinien, Österr. Ing.-Archiv 1 (1946), S. 277–296.

$$x = a \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi},\quad y = a \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\psi},\quad z = h \cdot \sin n\varphi \cdot \cos n\psi$$

$$\text{mit } ab \cdot \operatorname{tg}\psi - h \cdot \sin n\psi \cdot \cos n\varphi = 0 \tag{12}$$

eine Art Parameterdarstellung des eigentlichen Selbstschnitts der *schiefen offenen Umschwungstrahlfläche.* Dem vollständigen Selbstschnitt gehören für nicht ganzes n noch gewisse, von Doppelpunkten der Kehllinie herrührende *Doppelerzeugende* der Fläche an (im rationalen Fall $\lambda(\mu - 1)$, vgl. Abb. 1[7]), sowie der (für rationales n μ-fach zählende) *Fernkreis* der Fläche.

Für die Selbstschnitte der *geraden offenen Umschwungstrahlfläche* folgt mit $b = 0$ aus (12) zunächst

$$\sin n\psi = 0 \text{ oder } \cos n\varphi = 0.$$

Im ersten Fall erhält man wegen $\psi = k\pi/n = \text{const}$ (k ganz) gewisse *Umschwungkurven* als Teil des Selbstschnittes, darstellbar durch

$$x = a \cdot \frac{\cos(\sigma - \psi)}{\cos\psi},\quad y = a \cdot \frac{\sin(\sigma - \psi)}{\cos\psi},\quad z = h \cdot \sin n\sigma,$$

im zweiten Fall wegen $\varphi = (2j - 1) \cdot \pi/2n = \text{const}$ (j ganz) eine Anzahl von *Meridiankurven* als weitere Bestandteile der Selbstdurchdringung (vgl. Abb. 3), darstellbar durch

$$x = a \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos(\sigma - \varphi)},\quad y = a \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos(\sigma - \varphi)},\quad z = h \cdot \sin n\sigma.$$

Zum vollständigen Selbstschnitt sind dann noch die *Ferngerade* der achsennormalen Stellung zu rechnen, sowie — für nicht ganzzahliges n — wieder gewisse Doppelerzeugende.

Im Falle rationaler Frequenz ($n = \lambda/\mu$) treten dann insgesamt — je nachdem λ gerade oder ungerade ist — $\lambda/2$ bzw. $(\lambda - 1)/2$ verschiedene Umschwungkurven als Selbstschnitte auf, ferner λ Meridianschnitte und $\lambda(\mu - 1)$ Doppelerzeugende. Jeder der Meridianschnitte hat die halbe Flächenordnung, also die Ordnung $\lambda + \mu$.

[7] Die bei dieser Fläche ($a : h = 1 : 3$) auftretende Doppelkurve erweist sich als algebraische Kurve 7. Ordnung, die auf der *Müller*schen Fläche 3. Ordnung $2(x^2 + y^2)\, z = 9\, y$ liegt. Da sie die z-Achse als Asymptote besitzt, erscheint sie im Grundriß als (trizirkulare) Kurve 6. Ordnung. Die innerhalb des Kehlzylinders liegenden Punkte dieser Doppelkurve sind reelle Schnittpunkte konjugiert komplexer Erzeugenden. Da in Abb. 1 nur die vom Kehlpunkt beginnenden, nach oben gerichteten Halberzeugenden gezeichnet wurden, tritt auf dem so dargestellten Teil der Fläche kein Selbstschnitt auf.

Im Falle der *schiefen geschlossenen Umschwungstrahlfläche* liegen die durch einen Doppelpunkt gehenden Flächenerzeugenden in derselben Achsenebene, wobei parallele Lagen für die Bestimmung der eigentlichen Doppelkurve außer Betracht zu lassen sind. Die Gl. (11) werden durch

$$\bar{\sigma} = \sigma + (2k-1)\pi \ (k \text{ ganz}) \text{ und } v = -\bar{v} = \frac{h}{b} \cdot \sin n\varepsilon \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon)$$

$$\text{mit } \varepsilon = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

zu befriedigen sein. Damit gelangt man zu den Doppelkurven

$$x = -c \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon) \sin \sigma, \quad y = c \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon) \cos \sigma, \quad z = d \cdot \sin n(\sigma + \varepsilon)$$

$$\text{mit } c = \frac{h}{b} \cdot \sin n\varepsilon, \ d = h \cdot \cos n\varepsilon.$$

Jede dieser Doppelkurven liegt zur Gänze auf einem *Drehellipsoid*

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1$$

und hat als Grundriß eine spezielle Radlinie, nämlich die Rosenkurve

$$r = c \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon).$$

Die vorliegenden Doppelkurven sind daher im allgemeinen affin zu den sogenannten „Clelien" von *G. Grandi*[8], speziellen sphärischen Radlinien, die von einem Punkt beschrieben werden, der gleichförmig auf dem Umfang eines Kreises wandert, während sich dieser mit konstanter Geschwindigkeit um einen festen Durchmesser dreht. Für $c = 0$ reduziert sich jedoch die Linie auf einen Achsenabschnitt (vgl. Abb. 2), während sie für $d = 0$ zu einer ebenen Rosenkurve wird.

Im algebraischen Fall ($n = \lambda/\mu$) existieren — je nachdem λ gerade oder ungerade ist — μ bzw. 2μ solcher Doppelkurven und jede besitzt die Ordnung $N = 2 \cdot (\lambda + \mu)$, stellt mithin den vollständigen Schnitt der Fläche mit dem betreffenden Trägerellipsoid dar. Vervollständigt wird der Selbstschnitt dann noch durch $\lambda(\mu - 1)$ Doppelerzeugende und — falls $\mu > 1$ ist — den Fernkreis der Fläche.

Für den Fall der *geraden geschlossenen Umschwungstrahlfläche* schließlich setzt sich der Selbstschnitt (neben der Achse, vgl. Abb. 4) aus jenen Flächenerzeugenden zusammen, die durch die — bei nicht

[8] *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig, 1910, S. 358ff.

ganzzahligem n stets vorhandenen — Doppelpunkte irgendeiner auf der Fläche verlaufenden Umschwungkurve oder ihre Schnittpunkte mit der zu ihr bezüglich der Achse symmetrischen hindurchgehen. Für rationale Frequenz $n = \lambda/\mu$ besitzt die Fläche — je nachdem λ gerade oder ungerade ist — $\frac{\lambda}{2} \cdot (\mu - 1)$ bzw. $\lambda \cdot (2\mu - 1)$ derartige Doppelerzeugende.

§ 7. Eigen- und Schlagschatten der geraden Umschwungstrahlflächen bei Parallelbeleuchtung

Zur Ermittlung der Eigenschattengrenze der *geraden offenen Umschwungstrahlfläche* bei Parallelbeleuchtung (bzw. des wahren Umrisses bei Parallelprojektion) kann man sich auch für die rechnerische Behandlung des in § 3 auseinandergesetzten Prinzips der Drehfluchten bedienen: Demzufolge erhält man den Grundriß des Eigenschattenpunktes einer Erzeugenden g im Fußpunkt des aus dem Drehfluchtpunkt L_u^* der Lichtrichtung auf den Erzeugendengrundriß g' gefällten Lotes.

Fällt der Lichtstrahl l unter dem Winkel γ gegen die xy-Ebene ein und schließt sein Grundriß mit der positiven x-Achse den Winkel δ ein, so ergeben sich für seinen Drehfluchtpunkt L_u^* die Koordinaten

$$x = -q \cdot \sin\delta \cdot \cos n\sigma, \quad y = q \cdot \cos\delta \cdot \cos n\sigma,$$

wobei zur Abkürzung $hn \cdot \operatorname{ctg}\gamma = q$ gesetzt ist. Den Fußpunkt des aus L_u^* auf g' $(x \cdot \cos\sigma + y \cdot \sin\sigma = a)$ gefällten Lots erhält man dann in

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos\sigma - q \cdot \cos n\sigma \cdot \cos(\sigma - \delta) \cdot \sin\sigma \\ y &= a \cdot \sin\sigma + q \cdot \cos n\sigma \cdot \cos(\sigma - \delta) \cdot \cos\sigma. \end{aligned} \tag{13}$$

Dieses Gleichungspaar beschreibt bereits den *Eigenschattengrundriß*. Aus der komplexen Schreibweise

$$\mathfrak{z} = x + iy = a \cdot e^{i\sigma} + \frac{qi}{4} \cdot e^{-i\delta}(e^{ni\sigma} + e^{-ni\sigma})\,(e^{2i\sigma} + e^{2i\delta}) \tag{14}$$

ist dann zu ersehen, daß es sich hiebei im allgemeinen um eine *Radlinie 5. Stufe der Sippe* $1 : n : -n : (2+n) : (2-n)$ handelt. Lediglich für $n = 1$ liegt eine Radlinie 3. Stufe der Sippe $1 : -1 : 3$ vor und für $n = 2$ stellt sich eine Radlinie 4. Stufe der Sippe $1 : 2 : -2 : 4$ ein.

Für die Grenze des *Schlagschattens* der Fläche auf der xy-Ebene erhält man aus (14) und $z = h \cdot \sin n\sigma$ die komplexe Darstellung

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z} + z \,.\, \operatorname{ctg}\gamma \,.\, e^{i\delta} = a \,.\, e^{i\sigma} + \frac{qi}{4} \,.\, e^{-i\delta}\,(e^{ni\sigma} + e^{-ni\sigma})\,(e^{2i\sigma} + e^{2i\delta}) -$$

$$- \frac{qi}{2n} \,.\, e^{i\delta}\,(e^{ni\sigma} - e^{-ni\sigma}). \quad (15)$$

Diese Schlagschattengrenze ist mithin wieder eine *Radlinie 5. Stufe derselben Sippe wie* (14), gehört jedoch einer besonderen Kategorie an, da sie auch als Einhüllende einer Geraden erhalten werden kann, die einer Planetenbewegung unterworfen wird („zykloidale Radlinie"[6]). Für $n = 1$ und $n = 2$ tritt wie beim Eigenschattengrundriß eine Stufenreduktion ein.

Der Schlagschatten der Fläche auf eine allgemeine Ebene — oder der *scheinbare Flächenumriß* bei Parallelprojektion — ist schließlich eine zur eben erwähnten Radlinie 5. Stufe *affine* Kurve und erweist sich im allgemeinen als *Radlinie 8. Stufe* der Sippe

$$1 : -1 : n : -n : (n+2) : (n-2) : (2-n) : (-2-n).$$

Bei den *Umschwungwendelflächen* treten wegen $a = 0$ gewisse Vereinfachungen ein. So erweist sich der Eigenschattengrundriß als *Radlinie 4. Stufe* der Sippe $n : -n : (2+n) : (2-n)$, die gemäß (13) die einfache Polargleichung

$$r = q \,.\, \cos n\sigma \,.\, \cos(\sigma - \delta)$$

besitzt. Für $n = 1$ und $n = 2$ sinkt die Stufe auf 3; im letzteren Fall handelt es sich um das sogenannte „*schiefe Dreiblatt*", das als Eigenschattengrundriß des Plückerkonoids seit langem bekannt ist[9].

Für die Schlagschattengrenze auf einer achsennormalen Ebene ergibt sich gemäß (15) wieder eine zykloidale Radlinie derselben Sippe, die sich für $n = 1$ auf eine Radlinie 3. Stufe der Sippe $1 : -1 : 3$ (Parallelkurve einer Astroide), für $n = 2$ — also beim Plückerkonoid — sogar auf eine Steinerzykloide reduziert[9].

Der Schlagschatten auf eine beliebige Ebene — bzw. der scheinbare Umriß bei Parallelprojektion — ist im allgemeinen eine Radlinie 6. Stufe der Sippe $n : -n : (n+2) : (n-2) : (2-n) : (-2-n)$.

§ 8. Umschriebene Böschungstorsen

Unterwirft man eine Ebene ε samt einer ihrer Geraden g der Umschwungbewegung, so hüllt sie eine *Umschwungtorse* Θ ein, die der von

[9] *E. Müller* und *J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Wien, 1931, S. 218—220.

g erzeugten *Umschwungstrahlfläche* Φ umschrieben ist. Die Berührkurve j von Φ und Θ kann, da die Neigung von ε gegen die Achse z unverändert bleibt, als *Isophote* von Φ für z-parallele Beleuchtung angesehen werden. Variiert ε innerhalb des Büschels g, so erhält man auf diese Weise sämtliche Isophoten von Φ für achsenparalleles Licht, und diese bilden nach einem bekannten Satz[10] zusammen mit den Fallinien von Φ ein konjugiertes Netz.

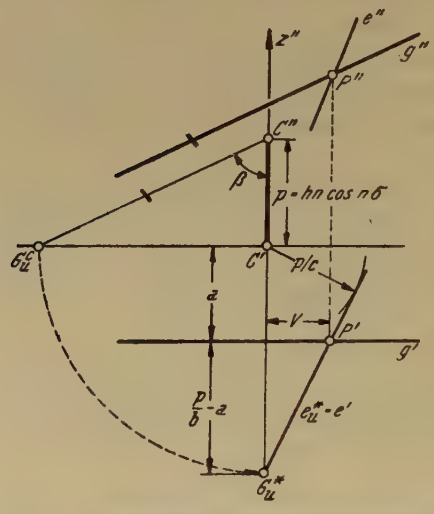

Abb. 6. Konstruktion der Berührkurve j einer Umschwungstrahlfläche mit einer umschriebenen Böschungstorse

Um eine solche Isophote j zu konstruieren, bedient man sich auch hier mit Vorteil des Drehfluchtprinzips. Die durch g gehende Ebene ε sei durch ihren Neigungswinkel γ gegen die Achse z festgelegt, wobei $\operatorname{ctg}\gamma = c > b$ sein muß. Die Drehfluchtspur e_u^* von ε geht durch den Drehfluchtpunkt G_u^* von g und hat den Zentralabstand $p \cdot \operatorname{tg}\gamma = p/c$ (Abb. 6); e_u^* deckt sich aber bekanntlich mit dem Grundriß e' der Torsenerzeugenden e, die g in einem Punkt P von j schneidet.

Der zu P gehörige Längenparameter v ist aus Abb. 6 unschwer mit

$$v = \frac{p - ab}{\sqrt{c^2 - b^2}} = m(hn \cdot \cos n\sigma - ab) \tag{16}$$

abzulesen, wobei abkürzend $c^2 - b^2 = m^{-2}$ gesetzt wurde. Trägt man diesen Wert von v in die Flächengleichung (4) ein, so erhält man für die Isophote j die folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos\sigma - m(hn \cdot \cos n\sigma - ab)\sin\sigma \\ y &= a \cdot \sin\sigma + m(hn \cdot \cos n\sigma - ab)\cos\sigma \\ z &= h \cdot \sin n\sigma + mb(hn \cdot \cos n\sigma - ab). \end{aligned} \tag{17}$$

[10] *E. Müller* und *E. Kruppa*, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Leipzig u. Berlin, 1936, 4. Aufl., S. 236.

Aus (16) ist zu ersehen, daß der Punkt P' auf der Geraden g' eine harmonische Schwingung vollführt, während sich diese Gerade gleichförmig um den festen Koordinatenursprung O dreht. Hieraus folgt, ähnlich wie in § 5, daß der *Isophotengrundriß* eine *Radlinie 3. Stufe* der Sippe $1 : (1 - n) : (1 + n)$ ist, was die komplexe Darstellung bestätigt:

$$\mathfrak{z} = x + iy = \mathfrak{a}_1 \cdot e^{i\sigma} + \mathfrak{a}_2 \cdot e^{(1-n)i\sigma} + \mathfrak{a}_2 \cdot e^{(1+n)i\sigma} \tag{18}$$

$$\text{mit } \mathfrak{a}_1 = a(1 - imb), \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{i}{2} mnh.$$

Für geschlossene Umschwungstrahlflächen ($a = 0$) reduziert sich die Radlinienstufe auf 2 und die Isophoten erscheinen im Grundriß als gewöhnliche Rosenkurven.

Einem Beobachter in der erstprojizierenden Ebene δ durch g bietet sich folgendes Bild: Der Berührpunkt P schwingt harmonisch auf der Geraden g hin und her und gleichzeitig — mit g — mit derselben Frequenz n in Achsenrichtung, beschreibt mithin in δ die *Ellipse*

$$v = m(hn \cdot \cos n\sigma - ab), \quad z = h \cdot \sin n\sigma + mb(hn \cdot \cos n\sigma - ab)$$

oder

$$(v + mab)^2 + m^2 n^2 (z - bv)^2 = m^2 n^2 h^2. \tag{19}$$

Die Isophoten liegen mithin im allgemeinen auf gewissen *Drehflächen 4. Ordnung*. Für gerade Umschwungstrahlflächen ($b = 0$) reduzieren sich diese Drehflächen auf ein Büschel von Drehellipsoiden

$$(x^2 + y^2 - a^2) + m^2 n^2 (z^2 - h^2) = 0 \tag{20}$$

Die zugehörigen Isophoten j lassen sich dann durch affine Streckung in z-Richtung in gewisse sphärische Radlinien überführen, die im Fall der Umschwungwendelflächen ($a = b = 0$) wieder die Clelien von *Grandi* sind.

§ 9. Schmieglinien

Ermittelt man auf Grund der Darstellung (4) durch Nullsetzen der zweiten Fundamentalform die *Schmieglinien* (Haupttangentenkurven) einer Umschwungstrahlfläche, so stößt man nach Abspaltung der Erzeugendenschar $\sigma = \text{const}$ auf die folgende *Riccati*sche Differentialgleichung für die *krumme Schmieglinienschar*:

$$2 \cdot \frac{dv}{d\sigma} = \frac{b}{hn \cdot \cos n\sigma - ab} \cdot v^2 - \frac{hn^2 \cdot \sin n\sigma}{hn \cdot \cos n\sigma - ab} \cdot v - a. \tag{21}$$

Diese Gleichung muß explizit lösbar sein, da die Umschwungstrahlfläche eine *Gewindefläche* ist — ihre Erzeugenden gehören ja einem linearen Strahlkomplex L mit der Achse z und dem Parameter a/b an —, so daß mit der auf solchen Flächen existierenden *Lie*schen Haupttangentenkurve die benötigten partikulären Lösungen zur Verfügung stehen.

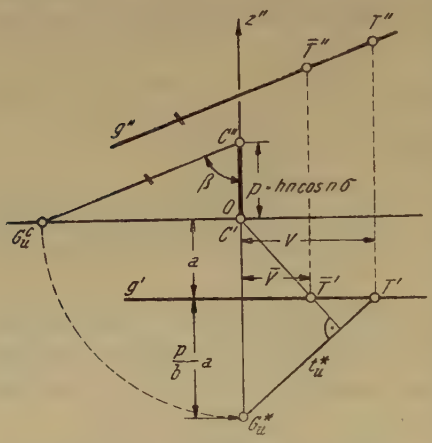

Abb. 7. Zur Ermittlung der *Lie*schen Schmieglinie einer Umschwungstrahlfläche

Es soll daher zunächst diese *Liesche Schmieglinie* bestimmt werden, und zwar für die allgemeine (schiefe offene) Umschwungstrahlfläche ($ab \neq 0$). Auf einer Erzeugenden g kann jedem Punkt $T(\sigma,v)$ zunächst die Tangentialebene τ und dieser dann ihr Nullpunkt $\bar{T}(\sigma, \bar{v})$ bezüglich L zugeordnet werden. Man findet an Hand von Abb. 7 [11]

$$v\bar{v} = a \cdot \left(\frac{p}{b} - a\right) \text{ mit } p = hn \cdot \cos n\sigma. \tag{22}$$

Für die beiden Doppelpunkte der Involution $T \leftrightarrow \bar{T}$, gekennzeichnet durch

$$v_{1,2} = \pm a \cdot \sqrt{q \cdot \cos n\sigma - 1} \text{ mit } q = \frac{hn}{ab} \tag{23}$$

fallen Tangentialebene und Nullebene zusammen[12]. Der Ort dieser Doppelpunkte ist daher eine auf der Fläche verlaufende *Gewindekurve*, und da für eine solche die Nullebenen auch die Schmiegebenen abgeben, handelt es sich um eine *Schmieglinie* der Fläche. Ihre Parameterdarstellung ist sofort hinzuschreiben, indem man die v-Werte aus (23)

[11] Gemäß § 3 verläuft die Drehfluchtspur $G_u^* T'$ von τ normal zu den Schichtenlinien von τ, insbesondere zu der die Achse treffenden, die als Nullstrahl den Nullpunkt $\bar{T}$ von τ tragen muß.

[12] Konstruktiv würde man diese Doppelpunkte im Grundriß der Abb. 7 im Schnitt von g' mit einem Hilfskreis über dem Durchmesser OG_u^* finden (vgl. Abb. 8).

in (4) einträgt. Abb. 8 zeigt das typische Aussehen einer solchen Kurve (für $n = 1$); reelle Züge treten natürlich nur auf, falls $q^2 > 1$, d. h. $|nh| > |ab|$ ist. Für rationales n ist diese Kurve algebraisch und ihre Ordnung ist bekanntlich gleich dem Rang der Fläche.

Mit Hilfe der partikulären Lösung

$$v_1 = a\sqrt{q \,.\, \cos n\sigma - 1}$$

läßt sich nun die Differentialgleichung (21) auf die Gestalt

$$v' = \frac{av^2}{2\,v_1^2} + \frac{v_1'\,v}{v_1} - \frac{a}{2} \text{ oder}$$

$$\left(\frac{v}{v_1}\right)' = \frac{a}{2\,v_1}\left[\left(\frac{v}{v_1}\right)^2 - 1\right] \tag{24}$$

bringen. Setzt man hierin $v/v_1 = \operatorname{cth} u$, so erhält man die allgemeine Lösung

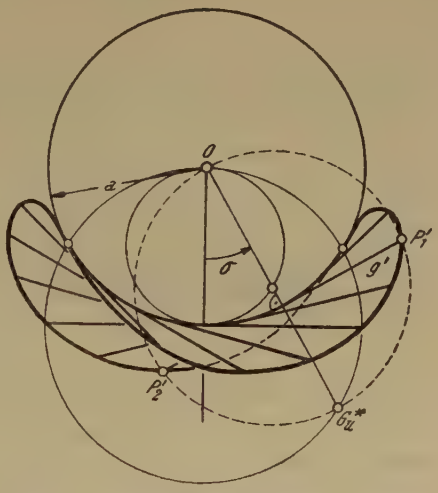

Abb. 8. Grundriß einer *Lie*schen Schmieglinie der allgemeinen Umschwungstrahlfläche ($n = 1$, $b = 1$, $a = 1$, $h = 2$)

$$v = v_1 \,.\, \operatorname{cth} u \text{ mit } u = -\frac{a}{2}\int \frac{d\sigma}{v_1} + C. \tag{25}$$

Die *Lie*sche Schmieglinie ist hierin für $C = \pm\infty$ enthalten.

Für die *schiefe geschlossene Umschwungstrahlfläche* ($a = 0$) geht Gl. (21) in eine *Bernoulli*sche über, welche sich mit Hilfe der Funktion $v_0 = \sqrt{hn \,.\, \cos n\sigma}$ (die keine Lösung darstellt) in der Form

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)' = \frac{b}{2\,v_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{26}$$

anschreiben läßt. Setzt man $v/v_0 = 1/u$, so gelangt man zur allgemeinen Lösung

$$v = \frac{v_0}{u} \text{ mit } u = -\frac{b}{2}\cdot\int \frac{d\sigma}{v_0} + C. \tag{27}$$

Die *Lie*sche Schmieglinie ($C = \infty$) ist hier zur Achse entartet.

Für die *gerade offene Umschwungstrahlfläche* ($b = 0$) wird die Schmiegliniengleichung (21) linear. Mittels derselben Hilfsfunktion $v_0 = \sqrt{hn \,.\, \cos n\sigma}$ nimmt sie die einfache Gestalt

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)' = -\frac{a}{2\,v_0} \tag{28}$$

an. Setzt man $v/v_0 = u$, so hat man die allgemeine Lösung in der Form

$$v = v_0 \,.\, u \text{ mit } u = -\frac{a}{2}\int \frac{d\sigma}{v_0} + C. \tag{29}$$

Die *Lie*sche Schmieglinie ($C = \infty$) ist hier ins Unendliche gerückt.

Für die *Umschwungwendelfläche* schließlich ($a = b = 0$) wird in (29) $u = \text{const}$ und die Schmieglinien werden mithin durch die Gleichung

$$v = C\sqrt{\cos n\sigma} \tag{30}$$

beschrieben, die im übrigen als die Polargleichung des Grundrisses aufgefaßt werden kann. Im Falle $n = 2$, d. h. beim *Plückerkonoid*, sind diese Grundrisse *Bernoulli*sche *Lemniskaten*; für $n \neq 2$ entstehen sie aus diesen durch $(2/n)$-fache Winkelzerrung. — Aus der Beziehung $(v/C)^4 + (z/h)^2 = 1$ folgt, daß die Schmieglinien auf gewissen *Drehflächen 4. Ordnung*

$$h^2(x^2 + y^2)^2 + C^4(z^2 - h^2) = 0 \tag{31}$$

liegen. Ihre Ordnung ist im algebraischen Fall ($n = \lambda/\mu$)

$$2 \,.\, \max(2\,\lambda,\, \lambda + 2\,\mu),$$

wobei dieser Wert auf die Hälfte zu reduzieren ist, wenn λ gerade ist. Da diese Schmieglinien, wie bei jeder Strahlfläche mit zwei Leitgeraden, durchwegs als *Lie*sche anzusehen sind und mithin auch Gewindekurven sind, liegen hier einfache Beispiele *algebraischer Gewindekurven* vor.

Buchbesprechungen

Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary. Von *O. Ore*. Mit 16 S. Hochglanzphotos. 277 S. Minneapolis: University of Minnesota Press. 1957. $ 5.75.

In diesem Buch wird in überaus eindrucksvoller Weise der Werdegang dieses großen Genies geschildert. Was diese Veröffentlichung als besonders wertvoll erscheinen läßt, ist das große Material an Privatbriefen, Zeitungsausschnitten und offiziellen Dokumenten, das hier zum ersten Mal verwertet wird. Wie in seinem früheren Werk über *Cardano* erweist sich *Ore* auch hier als Meister der Darstellung von historischen Begebenheiten. Erwähnt seien auch die schönen Illustrationen, die sehr dazu angetan sind, den Wert des Buches zu erhöhen.

P. Funk, Wien

History of Mathematics. Band I: General Survey of the History of Elementary Mathematics. Band II: Special Topics of Elementary Mathematics. Von *D. E. Smith*. XXII, 596 und XII, 725 S. New York: Dover Publications. 1958. Vol. 1 $ 2.75; Vol. 2 $ 2.75; beide Bände $ 5.—.

Das vorliegende Werk umfaßt die Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis zum 19. Jahrhundert. Einen verhältnismäßig breiten Raum nimmt die Geschichte der außereuropäischen Mathematik ein. Der erste Band ist chronologisch geordnet, der zweite Band sachlich. Das Werk enthält überaus zahlreiche, allerdings kurze biographische Skizzen. Es ist reich und gut illustriert. Dies ist insbesondere von Vorteil zur raschen Erfassung der antiken Methoden beim numerischen Rechnen. Geschildert werden auch vielfach Eigenartigkeiten in Methoden des mathematischen Unterrichtes und diese sind ebenfalls in anziehender Weise illustriert. Für eine tiefere Erfassung des Werdegangs mathematischer Ideen kommt dieses Werk nicht in Betracht. *P. Funk*, Wien

Die Deutsch-Russische Begegnung und Leonhard Euler. Herausgegeben von *E. Winter* in Verbindung mit *P. N. Berkov*, *N. A. Figurovskij* und *V. P. Zubov*. (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas: Band 1.) VIII, 196 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958.

Ein erheblicher Teil des Werkes handelt von dem wissenschaftlichen Leben in der Frühzeit der russischen Akademie der Wissenschaften, an der mathematische und physikalische Forschung in ganz besonders hohem Ansehen stand. Insbesondere enthält das Buch viele interessante Einzelheiten über *Eulers* Persönlichkeit und sein Wirken. Bemerkenswert ist vor allem eine von *E. Winter* verfaßte Einleitung, die eine schöne Übersicht über *Eulers* Stellung zu den philosophischen Lehrmeinungen seiner Zeit gibt. *P. Funk*, Wien

Formale Logik. Von *P. Lorenzen*. (Sammlung Göschen: Band 1176/1176a.) 165 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM 4.80.

Seit ihrer Begründung durch *Aristoteles* hat die formale Logik eine Entwicklung durchgemacht, die in vieler Hinsicht parallel läuft zur Entwicklung der

abendländischen Wissenschaft überhaupt, gegenwärtig aber durch den Vollständigkeitssatz und den Unentscheidbarkeitssatz zu einem gewissen Abschluß gekommen ist. Die im Laufe dieser Entwicklung gefundenen Hauptresultate der formalen Logik werden hier auf erstaunlich geringem Raum in meisterhafter Form entwickelt. Auf eine moderne, relationentheoretische Behandlung der Syllogistik folgt zunächst eine axiomatische Darstellung der Junktorenlogik, worauf der Begriff des Kalküls eingeführt wird. Ein eigenes Kapitel ist der effektiven Logik der Junktoren gewidmet. Es folgt eine Untersuchung der Quantorenlogik; der *Gödel*sche Vollständigkeitssatz wird nach *Schütte* bewiesen, der Unentscheidbarkeitssatz von *Church* ergibt sich aus der Existenz unentscheidbarer Kalküle. Das Schlußkapitel behandelt die Logik mit Gleichheit.

Das ungemein reichhaltige Bändchen vermittelt einen ausgezeichneten Überblick über den gegenwärtigen Stand der formalen Logik — mit Ausnahme der Modallogik —, ganz nebenbei aber auch einen guten Einblick in die historische Entwicklung des Gegenstandes, und man kann wirklich mit vollem Recht feststellen, daß es in keiner Bibliothek eines Mathematikers fehlen sollte.

W. Nöbauer, Wien

Triumph der Mathematik. Von *H. Dörrie*. Fünfte Auflage. Mit 112 Textabb., VII, 391 S. Würzburg: Physica-Verlag. 1958. DM 18.50.

Die in diesem Buch aufgenommenen 100 Aufgaben aus der Elementarmathematik lassen ein farbiges, fesselndes Bild entstehen, das eine Vorstellung von der erstaunlichen Vielgestaltigkeit der mathematischen Methoden gibt. Die Lösung so mancher dieser Aufgaben zeigt, welche Triumphe das mathematische Denken zu vollbringen vermag. Das Buch zeichnet sich durch große Übersichtlichkeit aus. Jede Aufgabe ist klar formuliert. Bei den meisten Aufgaben finden sich geschichtliche Bemerkungen bzw. Quellenangaben. Die Lösungen sind durch Fettdruck deutlich hervorgehoben. Es ist ein Buch, das allen, die an der Mathematik Interesse finden, wahrlich Freude bereitet. *J. Laub*, Wien

Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Herausgegeben von *F. Drenckhahn* auf Veranlassung des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission. Mit 22 Textabb., 377 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. Geb. DM 30.—.

Vor vier Jahren erschien der Bericht: Der mathematische Unterricht für die 16- bis 21jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland (siehe Mh. Math. 59, 162, 1955). Der vorliegende Band stellt eine Ergänzung nach unten dar. Beide Bände zusammen ergeben nun eine Berichterstattung über den gesamten Mathematik-Unterricht in der Deutschen Bundesrepublik. An dem neuen Band haben 30 Verfasser gearbeitet und es ist daher staunenswert, daß trotzdem ein einheitliches Ganzes zustande kam. Für die Berichterstattung war besonders erschwerend, daß das Schulwesen in der deutschen Bundesrepublik länderweise verschieden ist. Dadurch entstand eine große Mannigfaltigkeit parallel laufender und sich überschneidender Bildungsmöglichkeiten. Es herrscht eine arge schulische Zersplitterung. Hier Abhilfe zu schaffen, wäre dringend erwünscht. Die Aufsätze stellen Berichte über den mathematischen Unterricht in den Volksschulen, in den sechsjährigen Mittelschulen und in den neunjährigen Gymnasien dar. Sie sind Tatsachenberichte und heben die sich abzeichnende Entwicklung hervor. Funktionales Denken und das Abbildungsprinzip durchdringen nach

wie vor den ganzen Unterricht. An Stelle der Euklidischen Geometrie tritt mehr die Bewegungsgeometrie. Grundlegende Begriffe der Mathematik, wie Gruppenbegriff, Vektor und geometrische Verwandtschaft werden teilweise eingeführt. Von einer allgemeinen Stoffvermehrung kann nicht gesprochen werden. Methodisch hat sich manches gewandelt. Durch die Aufnahme neuer Schulfächer wurde die Anzahl der Stunden in der Mathematik verkürzt und dadurch der Unterrichtserfolg vermindert, was sich besonders bei den Studierenden der Technischen Hochschulen ungünstig auswirkt. Ein paar Aufsätze handeln von Psychologie und Pädagogik und ihrer Bedeutung für den mathematischen Unterricht. Ein 30 Seiten starkes Literaturverzeichnis bildet den Abschluß. Das Buch gibt den Lehrern der Mathematik einen ausgezeichneten Überblick über ihr Fach und sollte von allen gelesen werden. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematik. Band I: Arithmetik. Von *F. Holtmann.* 98 Textabb., XIV, 322 S. Dritte, unveränderte Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag. 1956. DM 6.—. — Band II: Geometrie. Von *F. Holtmann.* 441 Textabb., XVI, 526 S. Zweite, verbesserte Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag. 1958. DM 12.—.

Es ist erstaunlich, wie reichhaltig diese beiden Bände sind. Im ersten Band spannt sich ein weiter Bogen von den vier Grundrechnungsarten über den Mathematik-Lehrstoff unserer Mittelschulen bis zur Differential- und Integralrechnung. Der Inhalt des zweiten Bandes erstreckt sich von den geometrischen Grundbegriffen über die ebene Geometrie, sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie der Ebene und des Raumes bis zu den Vektoren. Nach der Absicht des Verfassers sollen diese beiden Bände nicht nur Formelsammlung sein; die wichtigsten Lehrsätze werden daher bewiesen. Figuren und Musterbeispiele unterstützen das Vorhaben des Verfassers. Beide Bände stellen daher einen wertvollen Behelf für Studierende an Fachschulen und interessierte Laien dar. Daß sich bei der Gedrängtheit des dargebotenen Stoffes manchmal auch Unklarheiten einschleichen, ist naheliegend. So wären im ersten Band auf den Seiten 16 und 17 die Ungleichungen $b + c < a$ bzw. $b > c$ aufzunehmen. Bei der Behandlung der Potenz (S. 39) wird zu wenig auf die Erweiterung des Potenzbegriffes wie a^1 eingegangen. Die Rechnungen auf S. 45 sollen „zeigen", daß $5^0 = 1$, $a^0 = 1$ ist. Bei der Definition der Zahl i wäre es wohl besser, von der Definition $i^2 = -1$ auszugehen. Auf S. 68 heißt es: Eine Bestimmungsgleichung enthält mindestens eine allgemeine Größe, die Unbekannte, ... Hier wird der Begriff der allgemeinen Zahl mit dem der Unbekannten vermengt. Sehr zu empfehlen ist es, im zweiten Band die Figuren 304, 305, 306, 309, 311, 313, 315, 316, 320, 322, 323 und 407 richtig zu stellen. *L. Laub*, Wien

Grundzüge der Mathematik. Für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft. Band I: Grundlagen der Mathematik — Arithmetik und Algebra. Auf Veranlassung des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission herausgegeben von *H. Behnke, K. Fladt* und *W. Süss.* Mit 55 Textabb. und 1 Zeittafel, XII, 558 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. Geb. DM 50.—.

Der deutsche Unterausschuß der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission will mit diesem Band den ersten Beitrag zur Bearbeitung der wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik geben. Drei weitere Bände

und zwar „Geometrie", „Analysis" und „Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik" sollen bald folgen. Jeder Artikel hat zwei Autoren, von denen der eine ein Hochschullehrer und der andere ein Gymnasiallehrer ist. Da die Aufsätze vermutlich in erster Linie von den Hochschullehrern stammen, so beschränke ich mich darauf, ihre Namen zu nennen. Es sind dies im vorliegenden Band: *W. Gaschütz, H. Gericke, W. Gröbner, O. Haupt, H. Hermes, D. Kurepa, H.-H. Ostmann* und *G. Pickert*. Die Stoffgebiete erstrecken sich über Grundlagen her Mathematik, Mengenlehre, Zahlbegriff, Gruppentheorie, Lineare Algebra, Polynome, Ringe, Ideale, Körpererweiterungen, Zahlentheorie, Theorie der Verbände und Strukturtheorie. Trotz der großen Zahl der Autoren und des umfangreichen Stoffes ist das Buch fast einheitlich geschrieben. Um auf kleinem Raum viel bringen zu können, wurde eine möglichst abstrakte Darstellung gewählt, wie sie durch die moderne Algebra gegeben ist. Ihre Begriffe und Methoden sind der Leitfaden durch den ganzen Band. Klarerweise mußten die Beweise meist kurz gefaßt werden, so daß kein Lehrbuch, sondern ein Nachschlagewerk entstanden ist. Das Ziel, die volle wissenschaftliche Bedeutung des Schulstoffes zu bringen, wurde im Band I voll und ganz erreicht, so weit es die Algebra betrifft. Einzelne Autoren bemühen sich auch, die Verbindung mit der Elementarmathematik herzustellen. Wie auf dem Titelblatt steht, ist das Buch für die Gymnasiallehrer und für die Industriemathematiker bestimmt. So sehr ich das Buch den Mathematikern empfehle, die das Doktorat anstreben oder schon erreicht haben, glaube ich nicht, daß den meisten Gymnasiallehrern und Industriemathematiker viel gedient ist. Ihr Abstraktionsvermögen und ihre Kenntnisse sind meist gering und daher ist das Buch ihnen zu schwer verständlich.

N. Hofreiter, Wien

Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Von *R. Zurmühl*. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 76 Textabb., XV, 467 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 33.—.

Der Matrizenkalkül erweist sich dank seiner übersichtlichen und eleganten Schreibweise und dank seiner Schematisierbarkeit aller Rechenoperationen als ideales Hilfsmittel. Er eignet sich in besonderem Maße beim Einsatz von modernen Rechenanlagen. Zahlreiche technische Aufgaben in der Elektrotechnik, Statik und Elastizitätslehre werden heute mit Hilfe von Matrizen durchgeführt. Unter den zahlreichen Büchern über Matrizen nimmt das Buch eine Sonderstellung ein. Es bringt eine breit dargestellte und umfangreiche Theorie mit starker Betonung der praktischen Methoden und der technischen Anwendungen. Die erste Auflage erschien 1950 und wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. 54, 355 (1950) ausführlich besprochen. Seither erschienen einige Bücher über Matrizen und auch in der technischen Literatur wurde die Matrizenrechnung viel verwendet. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine vollständige Neubearbeitung bei Berücksichtigung der neueren Literatur und noch stärkeren Betonung der technischen Anwendungen. Der verkettete Algorithmus, der die zweckmäßigste Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme bei Verwendung von Rechenmaschinen ist, wurde an die Spitze von Kapitel II gestellt und wird auch später viel verwendet. Das Problem der Auflösung linearer Gleichungssysteme und das Eigenwertproblem nehmen weiterhin eine zentrale Stellung ein. Für die Mathematiker und die Ingenieure in den technischen Forschungsanstalten und Laboratorien ist das Buch auch weiterhin ein unentbehrliches Hilfsmittel.

N. Hofreiter, Wien

Gruppentheorie. Von *L. Baumgartner*. (Sammlung Göschen: Band 837.) Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage. 110 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. Brosch. DM 2.40.

Während Neuauflagen vielfach nur geringe Änderungen bringen, liegt hier eine vollständige Neubearbeitung vor. Die neue Darstellung ist nicht so breit wie früher. Wohl spielen auch diesmal didaktische Gesichtspunkte beim Aufbau eine wesentliche Rolle. Durch zahlreiche Beispiele werden die Untersuchungen verständlich gemacht. Eine große Anzahl von Aufgaben regt den Leser zu eigener Arbeit an. Inhaltlich bringt die dritte Auflage entschieden mehr. Der Leser gewinnt durch die Sätze über Isomorphie, Homomorphie, Automorphie und Endomorphie neue Einblicke in die Struktur der Gruppen. Neben dem Satz von *Jordan-Hölder* werden auch die Verfeinerungssätze von *Schreier* und *Zassenhaus* gebracht. Ein Kapitel handelt sogar von freien Gruppen. Bei dem geringen Umfang mußte natürlich auf vieles verzichtet werden. So wird z. B. die Einfachheit der alternierenden Gruppe nicht bewiesen. Das Buch paßt vorzüglich in die Sammlung Göschen. *N. Hofreiter*, Wien

Topologische Gruppen. Teil 2. Von *L. S. Pontrjagin*. Mit 6 Textabb., 308 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 16.—.

Der erste Teil der deutschen Übersetzung dieses bekannten Werkes wurde besprochen in Band 62 der „Monatshefte für Mathematik". Der vorliegende zweite Teil beginnt mit einem Kapitel über lokal kompakte abelsche Gruppen. Vor allem werden die Beziehungen betrachtet, welche zwischen derartigen Gruppen und ihren Charaktergruppen bestehen; die dabei gewonnenen Dualitätssätze ermöglichen eine gründliche Untersuchung der Struktur dieser Gruppen. Das nächste Kapitel behandelt die Fundamente der Theorie der Lieschen Gruppen. Sodann wird die Struktur der kompakten topologischen Gruppen mit Hilfe von Lie-Gruppen studiert und insbesondere gezeigt, daß jede kompakte, lokal zusammenhängende Gruppe endlicher Dimension eine Lie-Gruppe ist; man findet in diesem Kapitel auch einige Sätze über transitive kompakte Transformationsgruppen. Es folgt ein Kapitel über lokal isomorphe Gruppen — deren Zusammenhänge im großen mit Hilfe der universellen Überlagerungsgruppe untersucht werden — während im nächsten Kapitel die Beziehungen zwischen Lie-Gruppe und zugehöriger Lie-Algebra ausführlich dargestellt werden. Im Schlußkapitel wird die Strukturuntersuchung der kompakten Lieschen Algebren und Lieschen Gruppen bis zu einer Klassifikation dieser Algebren und Gruppen durchgeführt.

Es braucht wohl kaum nochmals betont zu werden, daß man dieses Buch jedem, der die Theorie der topologischen Gruppen gründlich kennenlernen will, nur wärmstens empfehlen kann. *W. Nöbauer*, Wien

Zahlentheorie. Teil I. Von *L. Holzer*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 13.) VI, 202 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 9.75.

Wenn man glaubt, ein Buch der Sammlung „Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek" werde ohne Hochschulkenntnisse zu lesen sein und sich auf die elementare Zahlentheorie beschränken, so wird man enttäuscht. Der Leser braucht gute Vorkenntnisse aus der Vorlesung über lineare und höhere Algebra. Die Darstellung ist zwar nicht breit, aber doch nicht zu knapp. Stets merkt man das Bestreben des Verfassers, die Zahlentheorie auf den Begriffen

der modernen, abstrakten Algebra aufzubauen. Das Buch bringt in der ersten Hälfte elementare Zahlentheorie und in der zweiten Hälfte algebraische Zahlentheorie. Es beginnt daher mit Teilbarkeit, Kongruenzen, zahlentheoretischen Funktionen, Primitivwurzeln, wie die meisten einführenden Lehrbücher der Zahlentheorie. Ziemlich ausführlich werden binomische Kongruenzen und die Darstellung von Zahlen als Summe von Quadraten gebracht. Der Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes beruht auf Hilfsmitteln über Galoisfeldern und Gaußschen Summen. Kettenbrüche und quadratische Formen werden nicht behandelt. Aus der algebraischen Zahlentheorie mögen Basisdarstellungen, Ideale, Zerlegung in Primideale, Minkowskischer Diskriminantensatz, Endlichkeit der Klassenzahl in beliebigen algebraischen Zahlkörpern angeführt werden.

N. Hofreiter, Wien

Algebra und Differentialrechnung. Von *E. Kähler*. (Mathematische Monographien: Band 1.) 104 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 9.—.

Der Verfasser entwickelt in diesem Buch eine rein algebraische Theorie der Differentialformen. Jedem kommutativen Ring r wird ein nicht kommutativer Ring der Differentiale und in Bezug auf einen beliebigen Unterring der Ring der partiellen Differentiale zugeordnet. Eine besondere Rolle spielen die r-Moduln der Differentiale ersten Grades in diesen Differentialringen und die Determinantenideale dieser Moduln, welche Differenten bzw. Relativdifferenten genannt werden. Diese Ideale werden für gewisse Ringe unter Benützung p-adischer Schlußweisen berechnet. Nach Einführung einer Arithmetik in den Differentialringen wird gezeigt, daß die ganzen Differentialformen festen Grades eines endlichen rein transzendenten Funktionskörpers über einem Primkörper eine algebraische Gruppe bilden. Die Bezeichnungsweise dieses Buches ist etwas eigenwillig, aber trotzdem ein bemerkenswertes Werk. *E. Hlawka*, Wien

Structure et Objet de l'Analyse Mathématique. Von *E. Lefebvre*. Mit 6 Textabb., X, 284 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. fr. 3500.—.

Gegenstand des Buches ist das Gedankengebäude der klassischen Analysis. Es wird dabei aber keineswegs eine Beschreibung des Gebäudes selbst angestrebt, wie sie in den Lehrbüchern vorgenommen wird; was hier beschrieben wird, ist vielmehr die Bauweise dieses Gebäudes, also das zu seiner Errichtung verwendete Material und Werkzeug, die Anwendung dieses Werkzeuges und die Verbindung der Baustoffe.

Dementsprechend beginnt das Buch mit einer Behandlung der mit den Grundlagen der Mathematik zusammenhängenden Probleme der Erkenntnistheorie und Logik. Hierauf werden die Dinge untersucht, welche den Ausgangspunkt der klassischen Analysis bilden: Zahl und Gerade und ihr Zusammenhang sowie der Begriff des Grenzwertes. Eine Besprechung der beim weiteren Ausbau der Analysis auftretenden wichtigsten Definitionen führt schließlich zu einer Einteilung dieser Definitionen und zu einer allgemeinen Untersuchung der Rolle, welche sie in der Entwicklung der Analysis spielen. Im zweiten Kapitel werden dann die Beweismethoden der Analysis studiert: Die verschiedenen Hilfsmittel, welche bei den Beweisen benutzt werden, werden beschrieben und ihre Anwendung wird an zahlreichen Beispielen erläutert. Schließlich wird eine Einteilung der Beweise nach den zugrunde liegenden Leitgedanken vorgenommen, bei der sich insgesamt 18 verschiedene Typen von Beweisen ergeben. Das dritte Kapitel

beschäftigt sich mit den Resultaten der Beweise, also den Sätzen, die auch nach ihrem Charakter und ihrer Struktur eingeteilt werden; diese Einteilung wird wieder an zahlreichen Bespielen erläutert. Mit einem kurzen Schlußwort, in welchem die wichtigsten Begriffe der Analysis nochmals aufgezählt werden, schließt das originelle Werk. *W. Nöbauer*, Wien

An Introduction to the Theory of Integration. Von *A. C. Zaanen*. IX, 254 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1958. hfl. 25.—.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden. Mit Recht bezeichnet es der Verfasser als eine schwierige Aufgabe, in einer begrenzten Anzahl von Vorlesungsstunden eine einigermaßen vollständige Grundlage zum Studium der verschiedenen Fragestellungen und Ergebnisse zu bieten, mit denen sich die heutige Theorie der Integration beschäftigt. Daß diese Aufgabe von den Vorgängern des Verfassers noch nicht vollständig gelöst wurde, sieht man an diesem Buch. Kapitelüberschriften: Punktmengen, *Zorn*sches Lemma und metrische Räume. Maß. *Daniell*sches Integral. *Stieltjes-Lebesgue*-Integral. Satz von *Fubini*. *Banach*scher, *Hilbert*scher und L_p-Raum. Satz von *Radon-Nikodym*. Differentiation. Neue Variable beim *Lebesgue*-Integral. Maße und Funktionen auf der reellen Geraden. Komplexe Maße. Konjugierte Räume und schwache Konvergenz. *Fourier*-Transformation. Ergodentheorie. — Übungsaufgaben bringen wichtige Ergänzungen des Textes. Das Schöne an dem Buch ist es, daß — wie der Verfasser beabsichtigt hat — alle wesentlichen Punkte der Theorie in einer Art behandelt werden, welche „genügend elementar für eine erste Lektüre und genügend allgemein für das Verständnis schwierigerer Dinge" ist. Hervorzuheben ist auch noch die klare Darstellungsweise, die der Verfasser in besonderem Maße beherrscht. *K. Prachar*, Wien

Einführung in die Funktionentheorie. Teil I. Von *I. I. Priwalow*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 21.) Mit 71 Textabb., IV, 163 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 7.30.

Entsprechend den Zielen der Sammlung „Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek" gibt das Buch eine breit geschriebene Einführung in die Funktionentheorie. Teil I bringt die Darstellung der komplexen Zahlen, den Begriff der Funktion einer komplexen Variablen, Grenzwert, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, Reihen von Funktionen, Potenzreihen, holomorphe oder regulär-analytische Funktionen, konforme Abbildung, lineare Funktionen, Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmus und trigonometrische Funktionen. Es besteht im wesentlichen in einer Übertragung der aus der reellen Analysis bekannten Begriffe und Operationen ins Komplexe und in einer Untersuchung der Eigenschaften der Klasse der differenzierbaren Funktionen einer komplexen Variablen (holomorphe Funktionen). *N. Hofreiter*, Wien

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von *R. Sauer*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band LXII.) Zweite, erweiterte Auflage. Mit 68 Textabb., XVI, 284 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 38.—, Gln. DM 41.—.

Das Buch behandelt Anfangswertprobleme, die bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus auftreten. Sie kommen in der Physik

und Technik, vor allem bei Wellenausbreitungs- und Ausstrahlungsvorgängen, insbesondere in der Gasdynamik sehr oft vor. Die erste Auflage wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. 57, 93 (1953) ausführlich besprochen. Abgesehen von mehreren kleinen Ergänzungen unterscheidet sich die zweite Auflage dadurch, daß ein Kapitel über die Behandlung von Anfangswertproblemen mit Hilfe des Distributionskalküls neu hinzugefügt wurde. Die Distributionstheorie ist ein neuer fruchtbarer Zweig der Funktionalanalysis, in dem die Begriffe Funktion und Ableitung der klassischen Analysis erweitert werden. Damit erhält man einen einfachen Kalkül für die Lösung von Anfangswertproblemen. Die Brauchbarkeit des neuen Kalküls wird an praktischen Beispielen aus der Überschallströmung um Flugkörper erläutert. Ein nützliches Hilfsmittel zur Lösung von Anfangs- und Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen sind die Laplace-Transormationen. Hier wird gezeigt, wie sich die Theorie der Laplace-Transformation durch den Distributionskalkül erweitern läßt. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften. Von *G. Doetsch.* (Mathematische Reihe: Band 24.) Mit 40 Textabb., 301 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1958. Geb. sfr. 39.40.

Da der Autor bereits mehrere Bücher über die Laplace-Transformation geschrieben hat, so wird man bei diesem Buch zunächst glauben, es sei eine Neuauflage. Dies trifft aber nicht zu. Es ist auch kein Auszug des dreibändigen Werkes, das ein Handbuch ist, während das vorliegende Buch ein Lehrbuch ist. Didaktische Gesichtspunkte bestimmen den Aufbau und die Darstellung. Vergleiche mit den gut bekannten Potenzreihen, Fourier-Reihen, Fourier-Integralen führen zur Laplace-Transformation. Der Autor scheut keine Mühe, am Anfang alle Erörterungen ausführlich zu halten, um die Eigentümlichkeit der neuen Methode zum Vorschein kommen zu lassen. Mit Hilfe des Differentiationssatzes und des Faltungssatzes gelingt es, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangswerten mit einem Minimum an Rechenaufwand zu lösen. Ein besonderer Vorteil der Laplace-Transformation ist, daß sie unmittelbar die Lösung mit den Anfangsbedingungen liefert. Bei jeder Gelegenheit, insbesondere bei den Systemen von Differentialgleichungen, weist der Verfasser auf die Vorzüge der Laplace-Transformation hin. Sie ist auch vorteilhaft bei Anfangswertproblemen von Differenzengleichungen, die heute unter anderem in der Regelungstechnik und bei den elektronischen Rechenautomaten eine Rolle spielen. Erst in der zweiten Hälfte werden funktionentheoretische Kenntnisse vom Leser verlangt, so bei der Herleitung der komplexen Umkehrformel, bei der Frage der Darstellung einer Funktion als Laplace-Transformierte und bei asymptotischen Entwicklungen. Die Wärmeleitungsgleichung und die Telegraphengleichung werden als Beispiele von partiellen Differentialgleichungen gebracht und an ihnen das Prinzip der Laplace-Transformation gezeigt. Wer das Buch durchstudiert, erkennt, daß die Laplace-Transformation nicht bloß eine vorteilhafte Methode zur Auflösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen ist, sondern eine sehr interessante mathematische Theorie in sich birgt. Zum Unterschied von der technischen Literatur ist die Herleitung aller Sätze mathematisch sehr befriedigend. Eine genaue Formulierung der Voraussetzungen und der Tragweite der Formeln und Sätze zeichnen das Buch aus. Da es auch viele Anwendungen bringt, so gehören zu seinen Interessenten neben den Mathematikern auch die Physiker und Ingenieure. *N. Hofreiter*, Wien

Differenzenrechnung. Von *A. O. Gelfond.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 41.) VIII, 336 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 40.—.

Dieses Buch behandelt die Differenzenrechnung vor allem für analytische Funktionen. Betrachtet wird die Approximation von Funktionen durch Interpolationspolynome, Entwicklung analytischer Funktionen in *Newton*sche Reihen bei beliebiger Lage der Interpolationsstellen, Konstruktion ganzer Funktionen, wo die Werte dieser Funktionen und ihrer Ableitungen an unendlich vielen Stellen vorgegeben werden, und lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Doch finden auch die klassischen Teile der Theorie entsprechende Berücksichtigung, wie die Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen und Polynome (hier wird auch der Satz von *v. Staudt* gebracht), die *Euler*sche Summenformel, Differenzengleichungen (Satz von *Poincaré*) und die Theorie der Gammafunktion (Satz von *Hölder*). Der Verfasser hat seine wichtigen Untersuchungen zur Theorie der Differenzen, darunter auch ein Beispiel seiner berühmten Methode der Transzendenzbeweise, in diesem Buch dargestellt und sie so einem weiten Leserkreis zugänglich gemacht. Ein bedeutsames Werk! *E. Hlawka*, Wien

Theorie und Anwendungen harmonischer Integrale. Von *W. V. D. Hodge.* Aus dem Englischen übersetzt von *V. Ziegler.* VIII, 246 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 15.75.

Das bekannte Buch ist nun in deutscher Übersetzung erschienen. Es enthält die Sätze von *de Rham* und dem Verfasser. Im Mittelpunkt steht natürlich der berühmte Satz von *Hodge* über die Existenz harmonischer Integrale mit vorgeschriebenen Perioden. Die Übersetzung erfolgte nach der zweiten Auflage. Es ist keineswegs notwendig, über die Bedeutung dieses berühmten Werkes noch irgendwelche Worte zu verlieren. *E. Hlawka*, Wien

Integral Equations. Von *F. Smithies.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics: No. 49.) X, 172 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 27 s. 6 d. net.

Wenn auch die Literatur über Integralgleichungen schon sehr groß ist, so wird ein Buch mit einem Umfang, wie er in den Cambridge Tracts üblich ist, sehr begrüßt, wenn es wie das vorliegende hervorragend geschrieben ist. Fast immer liegen im *Lebesgue*schen Sinne quadratisch integrierbare Funktionen, sogenannte L^2-Funktionen $y(s)$ zugrunde. Auch die Kerne $K(s, t)$ der Integralgleichung

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\ x(t)\ dt$$

werden meist als L^2-Kerne angenommen. Das Buch enthält die Auflösung linearer Integralgleichungen mit Hilfe der *Neumann*schen Reihen (Kapitel II), die determinantenfreien Theoreme der *Fredholm*schen Theorie (Kapitel III), die klassische Theorie von *Fredholm* und damit die Darstellung der Lösungen durch *Fredholm*sche Determinanten unter der Voraussetzung, daß $y(s)$ und $K(s, t)$ stetig sind (Kapitel V). Der allgemeine Fall, wo $y(s)$ und $K(s, t)$ L^2-Funktionen bzw. L^2-Kerne sind, läßt sich nicht glatt übertragen und wird nach des Autors Abhandlung in Duke Math. J. 8 (1941) durchgeführt (Kapitel VI). Auch Kapitel VII und Kapitel VIII (*Hermite*sche L^2-Kerne, singuläre Werte und singuläre Funktionen eines allgemeinen L^2-Kernes) gehen z. T. auf des Autors Abhandlung

in Proc. London Math. Soc. 49 (1937) zurück. Das Buch beschränkt sich auf reine Theorie, bringt also keine Anwendungen und keine Näherungslösungen.

N. Hofreiter, Wien

Asymptotic Methods in Analysis. Von *N. G. de Bruijn*. (Bibliotheca Mathematica, A Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics: Band IV.) Mit 2 Textabb., XII, 200 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., Groningen: P. Noordhoff. 1958. hfl. 20.—.

Dieses Buch gibt eine ausführliche Darstellung der Methoden der asymptotischen Entwicklungen von Funktionen. Ein solches Buch lag bisher nicht vor. Nach einer sehr instruktiven Einführung wird auseinandergesetzt, wie man das asymptotische Verhalten von implizit gegebenen Funktionen und von Summen, wo die Glieder und die Anzahl der Glieder von einem Parameter abhängen, bestimmen kann. Dann wird die *Laplace*sche Methode für ein- und mehrfache Integrale auseinandergesetzt. Den Höhepunkt des Werkes bildet die Darstellung der Sattelpunktmethode. Hier werden alle Methoden und Kunstgriffe gebracht, welche zur Bestimmung der Sattelpunkte und der Integrationswege dienen können. Dann folgen Abschnitte über *Tauber*sche Sätze, asymptotisches Verhalten von iterierten Funktionen und von Lösungen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Alle Methoden werden zuerst an ganz einfachen Beispielen erläutert, von allen Seiten betrachtet, um dann an schwierigen Beispielen in allen Details durchgeführt zu werden. Das Werk ist eine Fundgrube an praktischen Winken. Es ist unentbehrlich für jeden Mathematiker, Physiker und Techniker. Es ist blendend und originell geschrieben. *E. Hlawka*, Wien

Ballistik. Von *H. Athen*. (Hochschulwissen in Einzeldarstellungen.) Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 59 Textabb., 258 S. Heidelberg: Verlag Quelle & Meyer. 1958. Geb. DM 29.—.

Die erste Auflage erschien 1941, also zu einer Zeit, in der besonderes Interesse für Ballistik vorhanden war. Sie wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **51**, 4 (1944) ausführlich besprochen. Seither hat die Ballistik besonders in praktischer Hinsicht große Fortschritte erzielt. Neue Probleme ergaben sich für die Ballistik durch die Verwendung der Flügelgeschosse, ferner dadurch, daß nun viele Geschosse mit Überschallgeschwindigkeit fliegen. Die Entwicklung der Raketentechnik veranlaßte eine Erweiterung der Ballistik. Daher wird nun ein eigenes Kapitel der Bomben- und Raketentechnik gewidmet. Um die neueren Entwicklungen einigermaßen berücksichtigen zu können, wurde manches aus der klassischen Ballistik gestrichen und manches straffer gefaßt .Nach wie vor ist das Buch ein einführendes Lehrbuch der theoretischen Ballistik, das die Grundlagen in voller Breite entwickelt. Im Mittelpunkt stehen die ballistischen Differentialgleichungen der äußeren und der inneren Ballistik und ihre mannigfachen Lösungsmethoden. Die numerische Auswertung der Flugbahngleichungen führte früher zu erheblichen mathematischen Schwierigkeiten. Diese werden heute mit Hilfe der modernen Rechenautomaten leichter überwunden. Bei jeder Gelegenheit werden Hinweise auf Anwendungen gegeben. Was in dem Buch behandelt wird, kann auf die Praxis angewandt werden. Da es ganz unmöglich ist, die vielen Einzelergebnisse der Ballistik in einem einführenden Lehrbuch zu bringen, so gibt der Verfasser zahlreiche Literaturhinweise. *N. Hofreiter*, Wien

Introduction to Functional Analysis. Von *A. E. Taylor*. XVI, 423 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 12.50.

Das Buch beginnt mit einem Kapitel über die algebraischen Eigenschaften linearer Räume und linearer Operatoren. Im zweiten Kapitel werden die in den folgenden Untersuchungen benötigten Begriffe und Sätze der Topologie zusammengestellt. Im dritten Kapitel werden zunächst normierte lineare Räume behandelt, aus denen sich durch Spezialisierung die Banach-Räume ergeben, während die Hilbert-Räume als Spezialfälle der Räume mit innerem Produkt erscheinen; schließlich wird aber auch eine kurze Einführung in die allgemeine Theorie der topologischen linearen Räume gegeben. Das vierte Kapitel bringt eine Reihe von fundamentalen Sätzen über stetige lineare Operatoren in normierten linearen Räumen, während im fünften Kapitel die allgemeine Spektraltheorie der linearen Operatoren entwickelt wird. Im sechsten Kapitel findet man die Spektraltheorie der symmetrischen linearen Operatoren in Räumen mit innerem Produkt, das Schlußkapitel skizziert den Aufbau der neuzeitlichen Theorie von Maß und Integral.

Man wird wohl schon aus dieser kurzen Inhaltsübersicht erkennen, daß dem Aufbau des Buches die moderne, abstrakte Auffassung des Gegenstandes zugrundeliegt. Die ausführliche, gut lesbare Darstellung in Verbindung mit zahlreichen Beispielen, durch welche die Begriffsbildungen erläutert werden und an denen ihre Zweckmäßigkeit vor Augen geführt wird, ermöglicht es dem Leser aber, sich auf bequeme Weise mit den Leitgedanken der modernen Funktionalanalysis vertraut zu machen, so daß das Buch als Einführung in das Gebiet sehr gut geeignet ist. *W. Nöbauer*, Wien

Calculus of Variations and its Applications. Proceedings of the Eighth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, held at the University of Chicago April 12—13, 1956. Herausgegeben von *L. M. Graves*. (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Band 8.) Mit 24 Textabb., 153 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company für die American Mathematical Society. 1958. 58/-d.

Mit Rücksicht auf die große Verschiedenheit der einzelnen Arbeiten glauben wir uns mit einer Angabe der Titel beschränken zu müssen.

Reissner: Über die Variationsprinzipien in der Elastizitätstheorie. *Drucker:* Über die Variationsprinzipien in der Plastizitätstheorie. *Hodge*: Diskussionsbemerkungen zu vorstehender Arbeit. *Keller:* Geometrische Theorie der Beugung. *Diaz:* Obere und untere Schranken für Eigenwerte. *Synge:* Stationäritätsprinzipe bei erzwungenen Schwingungen in der Elastizitätstheorie und in der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen. *Weinberger:* Eine auf Variationsrechnung beruhende rechnerische Methode bei Problemen über erzwungene Schwingungen. *Schiffer:* Anwendungen der Variationsrechnung bei der Theorie der konformen Abbildung. *Bellmann:* Dynamisches Programmieren und Anwendungen auf Variations-Probleme in der mathematischen Nationalökonomie. *Chandrasekhar:* Variationsrechnerische Methoden in der Hydrodynamik. *Rothe:* Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf die Variationsrechnung. *P. Funk*, Wien

Probability Theory. Foundations — Random Sequences. Von *M. Loève*. (University Series in Higher Mathematics.) XV, 515 S. New York-Toronto-London: D. Van Nostrand Company. 1955. $ 12.75.

Dieses groß angelegte Werk ist als Lehrbuch für graduierte Studenten und als Nachschlagewerk für auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik selbständig Tätige gedacht. Die Aneignung des ver-

arbeiteten Stoffes erfordert nach den Angaben des Verfassers ein Spezialstudium von drei bis vier Semestern. Die Grundlagen der Theorie werden in einem einleitenden Teil des Buches, sowie im ersten und zweiten Teil des Buches auseinandergesetzt. Der einleitende Teil enthält auf etwa 50 Seiten die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei denen die Maßtheorie nicht in vollem Umfang benötigt wird, und kann für sich als ausgezeichnete Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden (hier finden sich Dinge wie z. B. das starke Gesetz der großen Zahlen und *Markoff*sche Ketten). Teil Eins ist den Hilfsmitteln aus der Maßtheorie gewidmet. Diese werden in einer organischen Form mit den übrigen Teilen des Buches entwickelt, wodurch es für Vorlesungszwecke besonders geeignet erscheint. Der zweite Teil ist mit „Allgemeine Begriffsbildungen und Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitstheorie" überschrieben. Der folgende Teil des Buches beschäftigt sich mit den Familien von unabhängigen Zufallsveränderlichen, insbesondere mit den Verteilungsgesetzen für die Summen unabhängiger Variabler (Zentraler Grenzwertsatz, Gesetz vom iterierten Logarithmus, Unbeschränkt teilbare Verteilungsgesetze usw.). Teil Vier bringt unter dem Titel „Abhängigkeit" diejenigen Resultate, die über die verschiedenen Gesetzmäßigkeiten zufälliger Folgen bekannt sind, wenn deren Glieder nicht notwendig als unabhängig Variable vorausgesetzt werden. Hier finden sich z. B. die Ergodensätze für solche Folgen mit den verschiedenen Verallgemeinerungen und Verfeinerungen und — im Schlußkapitel — die Eigenschaften „zweiter Ordnung" eines stochastischen Prozesses, ein Teil der Theorie, an dessen Entwicklung der Verfasser selbst wesentlichen Anteil hat. Die historische Entwicklung wird stets übersichtlich dargestellt und durch Literaturhinweise unterstützt. Am Ende jedes Kapitels findet sich eine große Menge von höchst interessanten Problemen, Varianten von Beweisen und Ergänzungen zum Text. Es ist dies das Buch der Wahrscheinlichkeit, welches unter allen Werken über diesen Gegenstand vielleicht den modernsten Standpunkt einnimmt — dabei aber äußerst verständlich und immer auf konkrete Probleme bedacht. Leider ist es unmöglich, die Reichhaltigkeit dieses Buches in einem so kurzen Referat verständlich zu machen.

K. Prachar, Wien

A Comprehensive Bibliography on Operations Research. Through 1956 with supplement for 1957. Von Operations Research Group, Case Institute of Technology. (Publications in Operations Research: Nr. 4.) XI, 188 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.50.

Das Buch enthält 3000 Titeln von Arbeiten über Unternehmensforschung, die größtenteils 1956 erschienen sind. Die Anordnung erfolgt nach Verfassern in alphabetischer Reihenfolge. Nach dem Namen steht der Titel der Arbeit und eine genaue Angabe der Zeitschrift, in der die Arbeit veröffentlicht wurde. Vor dem Namen stehen 6 Zahlen, die Aussagen über den Inhalt der Arbeit machen. Dazu wurde eingangs eine Einteilung in 6 Gruppen gegeben und jede Gruppe in zahlreiche Unterfälle geteilt. Das Buch ist ein wichtiges Nachschlagewerk für alle, die sich für die in starker Entwicklung befindliche Unternehmensforschung interessieren.

N. Hofreiter, Wien

Scientific Programming in Business and Industry. Von *A. Vazsonyi*. Mit 121 Textabb., XIX, 474 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 13.50.

In der Geschäftswelt und in der Industrie treten öfters Probleme auf, deren Bewältigung den leitenden Angestellten wegen zu geringer mathematischer Bildung nicht möglich ist. Andererseits ist die Ausbildung der Mathematiker an den Hochschulen oft so wirklichkeitsfremd, daß sie sich in der Praxis nicht bewähren. Es besteht daher manchmal eine bedauerliche Kluft, zu deren Überbrückung das Buch beitragen will. Es will den Geschäftsleuten und Industriellen helfen, die in ihrem Wirkungskreis auftretenden Probleme in einer ihnen verständlichen Sprache zu erklären und die bewährten Lösungsmethoden auseinander zu setzen. Es ist daher kein Lehrbuch der Mathematik, denn sonst würde es die Probleme in abstrakter Weise formulieren und Beispiele aus den Anwendungen nur zur Illustration bringen. Es geht stets von Aufgaben der Geschäftswelt oder der Industrie aus und führt nur langsam zur mathematischen Formulierung heran. Die zu konkreten Problemen gehörende mathematische Formulierung (Aufstellung des mathematischen Modells) bietet bekanntlich oft besondere Schwierigkeiten. An zahlreichen Beispielen wird der Lösungsweg geschildert. Wer auch mathematische Beweise kennen lernen will, wird auf die einschlägige Literatur verwiesen. Von den in der Industrie auftretenden Problemen wird nur eine kleine Auswahl getroffen, die mit „wissenschaftlicher Programmierung" bezeichnet wird. Das sind meist Aufgaben, in denen unter mehreren Möglichkeiten die günstigste Entscheidung zu treffen ist oder mathematisch formuliert: in denen das Maximum oder das Minimum einer Funktion mit mehreren Veränderlichen gesucht wird, wobei als Nebenbedingungen noch Ungleichungen auftreten. Dazu gehört z. B. das Transportproblem, d. h. die Frage, wie soll der Transport von r Fabriken zu s Warenhäusern in einem Lande durchgeführt werden, damit die Kosten möglichst gering sind. Sind die als Nebenbedingungen auftretenden Ungleichungen sämtlich linear, so spricht man von linearer Programmierung. Sie nimmt einen sehr breiten Raum in dem Buche ein. Als bewährteste Lösungsmethode wird die Simplexmethode gebracht. Je ein größeres Kapitel ist dem dualen Problem der linearen Programmierung, der konvexen Programmierung, der dynamischen Programmierung, der Spieltheorie und der statistischen Inventarkontrolle gewidmet. Gerade die letzten Kapitel des Buches zeigen die große Bedeutung der Statistik für die Erzeugung und den Verkauf. *N. Hofreiter*, Wien

Experimental Designs in Industry. A Symposium Held at North Carolina State College (November 1956). Herausgegeben von *V. Chew*. (A Wiley Publication in Applied Statistics.) XI, 268 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.—.

Das Planen von Versuchen wurde zunächst in der Biologie und in der Landwirtschaft und erst später in der Industrie durchgeführt. Als auch hier zahlreiche Erfahrungen gesammelt und neue Methoden gefunden wurden, war es zweckmäßig, ein Symposium abzuhalten, zu dem praktische und theoretische Statistiker eingeladen wurden. Sie konnten ihre Erfahrungen austauschen und neue Entwicklungen aufzeigen. Das Buch enthält einen Teil der beim Symposium gehaltenen Berichte. Teil I handelt von Versuchen, die für die industrielle Forschung wichtig sind, z. B. Versuche in vollständigen und unvollständigen Blöcken, Versuche mit mehreren Faktoren; Teil II bringt Erfahrungen der Industrie mit dem Planen von Versuchen. Der mathematische Inhalt beschränkt sich im wesentlichen auf Varianzanalyse (Streuungszerlegung), Regressionstheorie und Ausgleichsrechnung (ohne Beweise). Die Berichte zum 1. Teil lauten: 1. Basic experimental designs, by *V. Chew*, 2. Complete factorials, fractional

factorials and confounding, by *R. L. Anderson*, 3. Simple and multiple regression analyses, by *R. J. Hader* and *A. H. E. Grandage*, 4. Experimental designs for exploring response surfaces, by *G. E. P. Box* and *J. S. Hunter*. Sie geben einen sehr guten Überblick und enthalten viele Literaturangaben. Den Praktiker werden mehr die Berichte zum 2. Teil interessieren. Das sind: 1. Experiences with incomplete block designs, by *W. S. Connor*, 2. Experiences with fractional factorials, by *W. H. Horton*, 3. Application of fractional factorials in a Food Research Laboratory, by *M. B. Carroll* and *O. Dykstra, Jr.*, 4. Experiences with response surface designs, by *R. M. DeBaun* and *A. M. Schneider*, 5. Experiences and needs for design in ordnance experimentation, by *C. A. Bicking*. Interessenten des Buches sind in erster Linie angewandte Statistiker. *N. Hofreiter*, Wien

Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Zusammengestellt von *U. Graf* † und *H.-J. Henning*. Berichtigter Neudruck. Mit 9 Abb., VII, 104 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 12.60.

Statistische Verfahren werden in ständig zunehmendem Maße in der Industrie und Technik verwendet. Formeln und Tabellen gehören zum Rüstzeug für das statistische Arbeiten. Das Buch enthält A) Formeln über Verteilungen, Stichproben und Kontrollkarten, B) zahlreiche durchgerechnete Beispiele, C) Tabellen, D) Nomogramme und E) ein reiches Literaturverzeichnis. Die außerordentliche Brauchbarkeit des Buches machte nach wenigen Jahren eine neue Auflage notwendig. Sie unterscheidet sich nur unwesentlich von der ersten Auflage, die in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **57**, 356 (1953) ausführlich besprochen wurde. *N. Hofreiter*, Wien

Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf. Mit Angabe der Genauigkeit in Zahl und Bild. Graphische Rechentafeln. Von *Ph. Lötzbeyer*. 46 S. Siebzehnte Auflage. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1958. DM 3.—.

Das in Fachkreisen sehr bekannte Tafelwerk, das nun in 17. Auflage erschienen ist, hat seinen bewährten Aufbau beibehalten. Der erste Abschnitt enthält neben den üblichen Zahlentafeln (Quadrate, Quadratwurzeln, Kuben, Kubikwurzeln, trigonometrische Funktionen, Aufzinsungsfaktoren, Sterbetafeln, ...) nun auch die Tafel mit den Summen der endlichen geometrischen Reihen. Logarithmentafeln folgen im zweiten Abschnitt. Ein eigener Abschnitt befaßt sich mit der Genauigkeit beim Tafelrechnen. Auf zwei Seiten ist das Wichtigste über das graphische Rechnen dargestellt. Die Zusammenstellung der Formeln aus der Elementarmathematik wurde in dieser Auflage um die wichtigsten Formeln aus der Vektorrechnung erweitert. Den Schluß bilden Umrechnungstafeln. Es ist für den Gebrauch der Tafeln sehr angenehm, daß keine der Tafeln eine Doppelseite überschreitet. Musterbeispiele erläutern den Gebrauch der Tafeln. Der auf gelblichem Papier erfolgte Druck ist fast durchwegs vorbildlich klar. Nur die Tafeln 1—4, sowie die Tafeln 14—17 wirken wegen der zu groß gewählten Lettern nicht so übersichtlich wie die anderen Tafeln.

J. Laub, Wien

Fehler in geometrischen Beweisen. Von *J. S. Dubnow*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band 19.) Mit 35 Textabb., 64 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Brosch. DM 3.80.

Das erste der vier Kapitel trägt die Überschrift: Fehler in elementaren Überlegungen. In diesem Kapitel werden an Hand von 10 Beispielen fehlerhafte

geometrische Beweise vorgeführt. Der Leser wird eingeladen, die Fehler aufzudecken. Sollte ihm das nicht gelingen, so kann er im zweiten Kapitel nachlesen, wo zu jedem dieser zehn Beispiele Erklärungen bzw. Hinweise gegeben werden, die es ermöglichen, die Fehler festzustellen. Das dritte Kapitel beinhaltet fünf Beispiele, bei deren Beweis Fehler auftreten, die mit dem Begriff des Grenzwertes zusammenhängen. Im vierten Kapitel sind Erläuterungen zu diesen Beispielen. Der Verfasser setzt genau auseinander, welcher Art die Fehler sein können und gibt dem Leser Ratschläge für seine selbständige Tätigkeit bei dem Bestreben, die Fehler aufzudecken. Das Beschäftigen mit diesen und ähnlichen Beispielen soll dazu beitragen, die mathematische Aktivität zu wecken und die mathematische Denkweise zu schärfen. *J. Laub*, Wien

Analytische Geometrie und lineare Algebra. Von *O.-H. Keller*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 26.) Mit 190 Textabb. und 77 Raumbildern, XII, 442 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 42.40.

Das vorliegende Werk ist ein Lehrbuch im wahrsten Sinne des Wortes. Der Verfasser beginnt mit den einfachsten Objekten der Anschauung und steigt dann allmählich zu den allgemeinen Begriffsbildungen auf. Neben der rechnerischen Herleitung der Sätze werden stets die geometrischen Gesichtspunkte und Beweise ausführlich besprochen und zeichnerische Konstruktionen für eine Reihe von Aufgaben gegeben. Dem entspricht es, daß dem Buch viele Abbildungen und insbesondere Raumbilder im Anaglyphenverfahren beigegeben sind. Das Buch enthält eine Reihe bemerkenswerter Einzelheiten. Einige Dinge seien herausgegriffen. Der Vektor wird als Verschiebung eingeführt, also als Operator. Die Determinantentheorie wird aus der Gleichungstheorie heraus entwickelt, an sich ein bekannter Gesichtspunkt, aber bisher, soviel ich weiß, noch nirgends tatsächlich explizit durchgeführt, wie dies hier geschehen ist. Die Elementarteilertheorie wird nach einem eleganten Verfahren von *H. Reichardt* behandelt. — Die Darstellung ist sehr ausführlich, so daß bereits jeder Student im ersten Semester den Ausführungen mit größter Leichtigkeit folgen kann. Es ist auch zum Selbststudium sehr zu empfehlen. *E. Hlawka*, Wien

Analytische Geometrie. Von *G. Pickert*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 24.) 77 Textabb., XII, 410 S. Dritte, bearbeitete Auflage. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1958. Geb. DM 26.—.

Die erste Auflage dieses Buches ist 1953 erschienen und in Mh. 57, 359 (1954) besprochen. Es handelt sich um ein aus Vorlesungen entstandenes Werk, in dem unter Verwendung eines auf den Punkt- und Vektorbegriff fußenden axiomatischen Aufbaues die analytische Geometrie im n-dimensionalen Raum entwickelt wird. Geometrische Tatsachen der 2- und 3-dimensionalen Geometrie, durch eine Reihe hervorragender Textabbildungen anschaulich gemacht, dienen bloß zur Illustration allgemeiner Sätze. Großen Wert legt der Autor darauf, möglichst die Entwicklungen so vorzutreiben, daß als Koordinatenkörper auch ein Schiefkörper verwendbar bleibt. Diese Tendenzen des Buches bringen naturgemäß für den Anfänger gewisse Schwierigkeiten; durch die Breite und ausführliche Darlegung werden jedoch auch für einen Anfänger die besonders in logischer Hinsicht prägnanten Ausführungen verständlich sein. In dieser Neuauflage sind außer stilistischen und einigen unwesentlichen textlichen Verbesserungen vor allem der Anhang II geändert worden, in dem gezeigt wird, wie man durch rein

geometrische Axiome jenes Axiom ersetzen kann, das die Skalare einführt und ihre Multiplikation mit Vektoren erklärt. Für die Beliebtheit des Buches spricht, daß innerhalb der kurzen Zeit bereits drei Auflagen nötig waren.

H. Brauner, Wien

Perspektywa Malarska. Band II. Von *K. Bartel.* Mit 427 Textabb., 589 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. Cena zl. 80.—.

Der seit langem ausständige II. Band des umfassenden Werkes über malerische Perspektive ist nunmehr erschienen — 17 Jahre nach dem gewaltsamen Tode seines Verfassers, seinerzeit Professor an der Technischen Hochschule in Lemberg. Der I. Band, erstmals 1928 verlegt und später durch die vorzügliche Übersetzung von *W. Haack* (Teubner 1934) weit über die Grenzen Polens hinaus bekanntgeworden, ist vor kurzem neu aufgelegt worden und war den geometrischen Grundlagen der Perspektive gewidmet. Der vorliegende Schlußband, dessen Manuskript vor der Vernichtung durch den Krieg gerettet werden konnte, ist jetzt unter der Redaktion von *F. Otto* herausgebracht worden und befaßt sich hauptsächlich mit ästhetischen und kunstgeschichtlichen Fragen. Daneben findet man aber auch eine gründliche Untersuchung der physiologischen Seite des Sehvorgangs und einige Abschnitte von ausgeprägt geometrischem Charakter, so insbesondere einen über Reliefperspektive und einen über „subjektive Perspektiven", wo verschiedene nichtlineare Abbildungen erörtert werden, die gewisse Härten des üblichen Projektionsvorganges beheben sollen. Die letzten fünf der insgesamt elf Kapitel bieten eine feinsinnige Analyse der Rolle, die geometrische Gesetzmäßigkeiten in der Malerei verschiedener Epochen gespielt haben. — Auch dieser Teilband ist überreich mit ausgezeichnetem Bildmaterial ausgestattet; eine Überstzung wäre sehr zu wünschen. *W. Wunderlich*, Wien

Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener Kurven. Von *W. W. Dobrowolski.* 134 Textabb., VIII, 134 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 18.—.

Der Autor versucht eine allgemeine Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener „geometrischer Kurven" (bewußt an Stelle von „algebraischen Kurven" gebraucht) aufzubauen. Die zu realisierende Kurve muß durch ein mathematisches Gesetz (synthetisch oder analytisch) als Punktort oder als Geradenmannigfaltigkeit gegeben sein. Dem Autor kommt es bei seinen Konstruktionen nicht so sehr darauf an, reine Gelenkwerke zu erzielen, mit denen man bekanntlich jede algebraische Kurve mechanisch verwirklichen könnte, sondern er bemüht sich, jede aus dem definierenden Gesetz abgeleitete Konstruktion durch einen Mechanismus ausführen zu lassen. Hiezu gebraucht er außer Gelenken noch Gleithülsen, Schieber und Zahnräder, manchesmal — wie z. B. in Abb. 108 — in einer solchen Vielzahl, daß man kaum von mehr als einem theoretischen Wert dieser Mechanismen sprechen kann. Daß dem Verfasser selbst an der praktischen Verwendbarkeit seiner Apparate Bedenken gekommen sind, geht aus seinem Schlußwort hervor. Trotzdem bietet vorliegendes Buch, das aus dem Russischen von *S. Oberländer* übersetzt worden ist, allen Freunden der Geometrie viel Interessantes.

Kapitel I bringt eine große Anzahl teils bekannter, teils neuer Konikographen. Diese werden entwickelt a) aus den metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte (metrisch-synthetische Methode), b) aus den Gleichungen der Kegelschnitte (analytische Methode), c) aus den affinen und projektiven Eigenschaften

der Kegelschnitte (projektive Methode), d) aus verschiedenen Erzeugungsmöglichkeiten der Kegelschnitte durch diverse Abbildungen, wie Kollineation, Polarsysteme usw. (Abbildungsmethode).

Im Kapitel II werden Apparate zur Konstruktion spezieller Kurven höherer Ordnung gebracht, wobei außer den bereits erwähnten Methoden auch die „Zuordnungsmethode" verwendet wird. In dem darauffolgenden Anhang werden spezielle rationale Kurven und sie erzeugende Mechanismen besprochen. Leider beziehen sich die Literaturhinweise am Ende des Buches fast ausschließlich nur auf russische Autoren.

R. Bereis, Dresden

Differentialgeometrie. Band II: Theorie der Flächenmetrik. Von *K. Strubecker*. (Sammlung Göschen, Bd. 1179/1179a.) Mit 14 Textabb., 195 S. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1958. DM 4.80.

Band III: Theorie der Flächenkrümmung. Von *K. Strubecker*. (Sammlung Göschen: Band 1180/1180a.) Mit 38 Textabb., 254 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. Brosch. DM 4.80.

Der erste Band dieser Differentialgeometrie, der die Kurventheorie behandelt, wurde im Mh. 59, 348 (1955) besprochen. Die vorliegenden beiden Restbände sind der Flächentheorie gewidmet. So wie auch der erste Band beschränken sie sich auf die metrische Differentialgeometrie des 3-dimensionalen euklidischen Raumes, und zwar unter Verwendung des auf *Gauß* zurückgehenden Kalküls der quadratischen Differentialformen. Von den neueren Darstellungen desselben Sachgebietes unter Verwendung dieses klassischen Kalküls unterscheiden sie sich vor allem durch eine Fülle geometrischer Einzelheiten in Form von Ergänzungen und Beispielen, durch die für ein Lehrbuch der Differentialgeometrie außergewöhnliche Exaktheit der analytischen Darstellung und schließlich durch die weitgehende Heranziehung von Begriffsbildungen der isotropen Geometrie. Gerade dieser letzte Punkt erscheint durch die zahlreichen Publikationen des Autors über die Geometrie des isotropen Raumes verständlich.

Der erste Teil der Flächentheorie behandelt die innere Geometrie der Flächen, die Vektoranalysis auf Flächen, die Theorie der Abbildungen von Flächen und die Theorie der geodätischen Linien (unter Verwendung auch der absoluten Differentiation längs Flächenkurven). Im zweiten Teilband wird zuerst die Theorie der Flächenkrümmung besprochen sowie jene tiefer liegenden Teile der inneren Flächentheorie, die sich an den Begriff der Gaußschen Krümmung anschließen. Insbesondere werden die projektiven und konformen Modelle der nichteuklidischen Geometrien entwickelt. Der Fundamentalsatz von *Bonnet* wird bewiesen und als Beispiel eines Satzes der Differentialgeometrie im großen die Unverbiegbarkeit der Eiflächen behandelt. Der letzte Abschnitt ist den Minimalflächen gewidmet.

Damit ist ein sich durchaus im klassischen Rahmen bewegendes Lehrbuch der Differentialgeometrie erschienen, das überall deutlich die Persönlichkeit des Autors spürbar macht und durch die Eleganz der Darstellung und die Fülle der gebotenen Ergebnisse für Anfänger und Kenner äußerst wertvoll ist.

H. Brauner, Wien

Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. Von *A. P. Norden*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 35.) Mit 115 Textabb., IX, 259 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 14.—.

Diese Übersetzung des 1953 in russischer Sprache erschienenen Buches bringt eine systematische, exakte Darstellung der Grundlagen der Lobatschewskischen Geometrie in elementarer Form. Dabei versucht der Autor einen großen Personenkreis mit den Ideen dieses Geometers bekannt zu machen, sowie die historische Stellung dieser Theorie und ihre weitgehenden Folgerungen für alle Gebiete mathematischer Forschung aufzuzeigen. Dies geschieht unter Verwendung von 115 erstklassigen Textfiguren in sprachlich und didaktisch meisterhafter Form, was vor allem in den letzten Abschnitten (Riemannsche Geometrie, Geometrie und Physik, automorphe Funktionen usw.) zum Ausdruck kommt.

Nach einem kurzen Abriß der Entstehungsgeschichte der Lobatschewskischen Geometrie und einer Übersicht über die Axiome der absoluten Geometrie werden vom Parallelaxiom unabhängige Sätze der ebenen Geometrie behandelt und anschließend die Geometrie der Lobatschewskischen Ebene und des Raumes. Insbesondere wird dabei die gegenseitige Lage der Geraden, die Theorie der Defekte und der Flächeninhalte, die Theorie der Kurven konstanter Krümmung und die wichtigsten Tatsachen der Stereometrie dargestellt. Ein eigener Abschnitt ist der inneren Geometrie der Orisphäre gewidmet. Entsprechend dem elementaren Charakter des Buches werden die grundlegenden Eigenschaften der Exponentialfunktionen und der hyperbolischen Funktionen abgeleitet und die Lobatschewskische Funktion explizit dargestellt. Damit ist das Rüstzeug zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie gegeben. Die Widerspruchsfreiheit wird durch Konstruktion des projektiven Modells erläutert, wobei die zum Kleinschen Modell nötigen Kenntnisse der projektiven Geometrie entwickelt werden.

Dieses Buch gliedert sich in würdiger Weise in die vom deutschen Verlag der Wissenschaften herausgegebene Reihe von Hochschulbüchern an und wird (von manchen für den westlichen Leser kaum akzeptierbaren erkenntnistheoretischen Hinweisen abgesehen) eine wertvolle Bereicherung des Büchermarktes darstellen. *H. Brauner*, Wien

Electronic Digital Computers. Their Use in Science and Engineering. Von *F. L. Alt.* (Applied Mathematics and Mechanics: Band 4.) Mit 8 Textabb., X, 336 S. New York-London: Academic Press. 1958. $ 10.—.

Obwohl elektronische Rechenmaschinen erst seit etwa 15 Jahren bestehen, haben sie seither eine rasante Entwicklung durchgemacht. Der Bereich der Anwendungen ist enorm geworden. Daher ist ein großes Interesse vorhanden, ein Buch wie dieses zu lesen, das eine gute Einführung gibt und ob der geringen Vorkenntnisse leicht zu verstehen ist. Es geht weder auf technische Details ein, noch gibt es mathematische Beweise. Es beschreibt die Prinzipien elektronischer Digitalrechenmaschinen und die vorbereitende Tätigkeit (Kodieren und Programmieren). Ein großes Kapitel ist der praktischen Mathematik gewidmet. Dieses Kapitel bringt die numerischen Methoden, mit denen man die am häufigsten vorkommenden mathematischen Probleme der Algebra und der Analysis mit elektronischen Rechenmaschinen näherungsweise lösen kann. Zuletzt werden Ratschläge für die Anschaffung einer elektronischen Rechenmaschine gegeben. *N. Hofreiter*, Wien

Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung. Von *Ja. S. Zypkin.* Aus dem Russischen übersetzt von *W. Hahn* und *R. Herschel.* Mit 249 Textabb. und 17 Tabellen, 472 S. München: R. Oldenbourg. — Berlin: Verlag Technik. 1958. DM 52.—.

Relaisglieder werden in vielen Regelungssystemen verwendet und gehören zu den einfachsten nichtlinearen Regelungsgliedern. Es ist daher besonders wichtig, daß deren Theorie mit einem verhältnismäßig geringen mathematischen Apparat dargestellt werden kann mit Methoden, die den bei linearen Systemen benötigten analog sind — wobei allerdings die Anpassung an die physikalischen Vorgänge besondere Kunst erfordert. Der Verfasser hat in dem vorliegenden Werk mit großem Geschick diese Methoden in ausführlicher und gründlicher Weise auseinandergesetzt. Kapitelüberschriften: Einleitung. Die Relaissysteme der automatischen Regelung und ihre Klassifizierung. Die Gleichungen der Relaissysteme der automatischen Regelung. Die Übergangsprozesse in Relaissystemen und ihre Betriebszustände. Die Stabilität der Gleichgewichtslage in Relaissystemen. Eigenschwingungen in Relaissystemen. Untersuchung der Eigenschwingungen. Erzwungene Schwingungen. Stabilität periodischer Zustände. Kriterien für die Stabilität periodischer Zustände. Berechnung der periodichen Zustände und Abschätzung ihrer Form. Die Linearisierung der Relaissysteme. Optimale Vorgänge in Relaissystemen. Mathematischer Anhang. — An Vorkenntnissen sind nur die allerersten Grundbegriffe der linearen Theorie der Regelvorgänge nötig und im übrigen auch diese im Anhang zusammengestellt. Die Literaturhinweise sind sehr sorgfältig. — Das Buch — welches trotz gründlicher theoretischer Erörterungen niemals die Erfordernisse der Praxis außer Acht läßt — wird jedem Fachmann eine große Hilfe und jedem Amateur eine schöne Lektüre sein. *K. Prachar*, Wien

Elektronenbeugung. Theorie, Praxis und industrielle Anwendungen. Von *E. Bauer*. Mit 108 Textabb., 233 S. München: Verlag Moderne Industrie. 1958. DM 32.—, S 217.60.

Das vorliegende Buch behandelt die Anwendungsmöglichkeiten der Elektronenbeugung in der Praxis. Es gliedert sich in einen theoretischen (S. 15—56), in einen experimentellen (S. 57—154) und einen den praktischen Anwendungen gewidmeten Teil (S. 155—203). Daran schließt sich ein 13 Seiten langes Literaturverzeichnis mit 550 Zitaten, eine Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen und schließlich ein 13 Seiten langes Sachverzeichnis mit 300 Stichwörtern an. 108 Abbildungen illustrieren in hervorragender Weise die verschiedenen Themenkreise.

Im ersten, theoretischen Teil werden ohne ausführliche Beweise die auf der Braggschen Gleichung ruhende geometrische Theorie, die v. Lauesche kinematische Theorie und schließlich die dynamische Theorie nach *H. A. Bethe* dargestellt. Im experimentellen Teil, der das Kernstück des Buches bildet, wird der grundsätzliche Aufbau der Elektronenbeugungsapparaturen und deren einzelne Teile (Strahlerzeugung, Objektkammer, Elektronenlinse usw.) besprochen. Von besonderer Wichtigkeit ist in diesem zweiten Teil das Kap. über die theoretischen und experimentellen Möglichkeiten und Grenzen, um sich der Grenzen des Verfahrens der Elektronenbeugung bewußt zu werden und seine Möglichkeiten nicht zu überschätzen. Ferner behandelt ein sehr wertvolles Kap. die Deutung der Elektronenbeugungdiagramme. Im dritten, praktischen Teil werden ausführlich die Anwendungsmöglichkeiten der Elektronenbeugung in den verschiedenen Industriezweigen (wie metallschaffende, chemische, Elektro- und optische Industrie) erörtert.

Das Buch stellt für alle auf dem Gebiet der Elektronenbeugung arbeitenden Industriephysiker ein unentbehrliches Hilfsmittel dar und dürfte wohl bald neue Auflagen erleben. *Th. Sexl*, Wien

Festkörperphysik und Physik der Leuchtstoffe. Tagung der Physikalischen Gesellschaft in der D.D.R. vom 20. bis 24. Okt. 1957 in Erfurt. (Tagungsberichte der Physikalischen Gesellschaft in der D.D.R.) Mit 288 Textabb., 322 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958. Brosch. DM 48.—.

Die auf der Tagung der physikalischen Gesellschaften der D.D.R. in Erfurt im Oktober 1957 gehaltenen Vorträge, die das Gebiet der Festkörperphysik und die Physik der Leuchtstoffe zum Thema hatten, werden in erstaunlich kurzer Frist unter der verantwortlichen Redaktion von Prof. Dr. *P. Görlich* (Zeiss-Werk, Jena) und von Dr. *Henry Ortmann* (Institut für Strahlungsquellen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) in einem stattlichen Bande von 322 Seiten zusammengefaßt. 55 Vorträge der verschiedensten Autoren behandeln auf durchschnittlich 5 Seiten Länge die verschiedensten Fragestellungen aus den genannten Themenkreisen. Dabei kommen nicht nur Gelehrte der D.D.R. sondern auch ausländische Gelehrte aus Bulgarien, China, ČSR., Polen und Ungarn zu Wort. Auf Einzelheiten einzugehen, erscheint bei der Fülle der Problemstellungen und der erreichten Fortschritte unmöglich. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Acta Physica Austriaca.

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **Fritz Regler**, Wien, und **Hans Thirring**, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Zuletzt erschien:

Band 12, Heft 2. (Ausgegeben im Oktober 1958.) Mit 36 Abbildungen. 96 Seiten. 1958. S 144.—, DM 24.—, sfr. 24.60, $ 5.70

Inhaltsverzeichnis: **Steinmaurer, R.** VICTOR F. HESS zum 75. Geburtstag. — **Stippel, H.** Die Verwendung von Dipolsingularitäten bei der Berechnung heterogener Reaktoren. — **Ledinegg, E.,** und **P. Urban.** Zur Theorie der NÉEL-schen Kette. — **Székely, A.** Untersuchung eines ionisierten Gases mittels schwacher elektrischer Wechselfelder. — **Preining, O.** Ein Wellenleiter für Oberflächenwellen von Flüssigkeiten. — **Gross, R., A. Aron, E. Meyer, F. X. Roser, S. Costa Ribeiro** und **A. C. Olinto.** Fallout Particles of High Specific Activity. — **Ledinegg, E.** Zur Theorie des Impulsdurchganges in einem 2 n-Pol-Hohlraumsystem. — Buchbesprechungen.

Österreichisches Ingenieur-Archiv.

Herausgegeben von **K. Federhofer**-Graz, **P. Funk**-Wien, **W. Gauster**-Raleigh, USA, **K. Girkmann**-Wien, **F. Jung**-Wien, **F. Magyar**-Wien, **E. Melan**-Wien, **H. Melan**-Wien. Schriftleitung: **F. Magyar**-Wien.

Zuletzt erschien:

Band XII, Heft 1 und **2** (Schlußheft). (Abgeschlossen im September 1958.) Mit 16 Textabbildungen. 112 Seiten. 1958.

S 258.—, DM 43.—, sfr. 44.—, $ 10.25

Inhaltsverzeichnis: **F. Schulz.** Franz Magyar †. — **H. Hofmann.** Über das Drehmoment im elektromagnetischen Feld. Zweiter Teil: Stationäres Magnetfeld, nichtstationäres, elektromagnetisches Feld. — **C. Torre.** On the Motion of Plastic Mass. — **L. Kirste.** Druckstäbe geringsten Gewichts. — **A. Huber.** Parallelstromrekuperatoren mit temperaturabhängiger Wärmedurchgangszahl. — **H. Scholz.** Das Verfahren von Krylow-Bogoljubow zur Behandlung nichtlinearer Schwingungsprobleme. — **W. Müller.** Zur Ableitung der elastostatischen Gleichungen für Rotationsschalen aus dem Minimalprinzip der Variationsrechnung. — **E. Bukovics.** Prinzipien bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Methoden zur Abschätzung des Fehlers. — **F. Buckens.** Über Eigenwertscharen. — **R. Gran Olsson.** Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. — **J. S. Frame.** Eine Lösung in Kettenbrüchen für die Kármánsche Theorie der Rohrbiegung. — **K. Girkmann** und **R. Beer.** Anwendung der verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten. — **H. Parkus.** Alfred Basch †. — Buchbesprechungen.

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, M. Kneser, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** — Neue Folge.

Fünfzehntes Heft: **Theorie der Limitierungsverfahren.** Von **K. Zeller,** Tübingen. VIII, 242 Seiten. Gr.-8°. 1958. Steif geheftet DM 36.80

Achtzehntes Heft: **Univalent Functions and Conformal Mapping.** By **James A. Jenkins.** With 6 figures. VIII, 169 Seiten. Gr.-8°. 1958. DM 34.—

Zwanzigstes Heft: **A Survey of Binary Systems.** By **Richard Hubert Bruck.** VIII, 185 Seiten. Gr.-8°. 1958. DM 36.—

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von **R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.**

Band XCV: **Kontinuierliche Geometrien.** Von Professor Dr. **F. Maeda,** Professor der Mathematik an der Universität Hiroshima. Mit 12 Abbildungen. X, 244 Seiten. Gr.-8°. 1958. DM 36.—, Ganzleinen DM 39.—

Band XCVII: **Lineare Algebra.** Von Dr. **Werner Graeub,** Privatdozent am Mathematischen Institut der Universität Zürich. Mit 7 Abbildungen. XI, 219 Seiten. Gr.-8°. 1958. DM 35.70, Ganzleinen DM 39.—

Band XCVIII: **Versicherungsmathematik.** Von Dr. **Walter Saxer,** o. Professor der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

Zweiter Teil: Mit einem Anhang von Dr. **Heinrich Jecklin,** Titular-Professor an der Universität Zürich. IX, 283 Seiten. Gr.-8°. 1958.

DM 45.—, Ganzleinen DM 48.60

Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik

Zusammengestellt von Prof. Dr.-Ing. habil. **Ulrich Graf** †, Düsseldorf, und Dr. phil. **Hans-Joachim Henning,** Rheydt-Odenkirchen. Mit 9 Abbildungen. Berichtigter Neudruck. VII, 104 Seiten. Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 12.60